2000年上海市普通高等学校春季招生考试

数学试卷

一、填空题(本大题满分48分)本大题共有12题,只要求直接填写结果,每个空格填对得4分,否则一律得零分.

1. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{3}{5}$,则 $\cos 2\alpha=$__________.

2. 若函数 $f(x)=\frac{x}{x+2}$,则 $f^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=$__________.

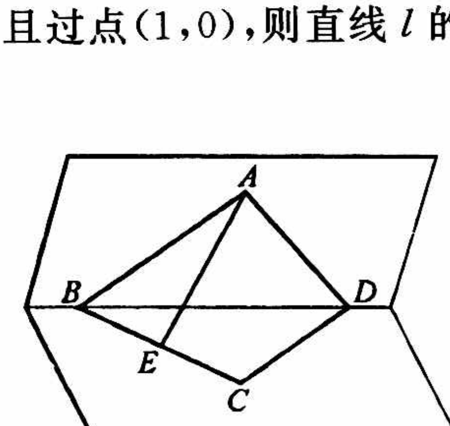
3. 方程 $\log_4(3x-1)=\log_4(x-1)+\log_4(3+x)$ 的解是__________.

4. 若 $(\sqrt{x}+a)^5$ 的展开式中的第四项是 $10a^2$(a 为大于零的常数),则 $x=$__________.

5. 在三角形 ABC 中,$\sqrt{2}\sin A=\sqrt{3\cos A}$,则 $\angle A=$______.

6. 若直线 l 的倾角为 $\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$,且过点 $(1,0)$,则直线 l 的方程为__________.

7. 若数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $\frac{1}{n(n+1)}$ $(n\in\mathbf{N})$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+n^2a_n)=$__________.



8. 如图,$\angle BAD=90°$ 的等腰直角三角形 ABD 与正三角形 CBD 所在平面互相垂直,E 是 BC 的

中点，则 AE 与平面 BCD 所成角的大小为__________.

9. 若两个长方体的长、宽、高分别为 5cm、4cm、3cm，把它们两个全等的面重合在一起组成大长方体，则大长方体的对角线最长为__________cm.

10. 有 $n(n\in\mathbf{N})$ 件不同的产品排成一排，若其中 A、B 两件产品排在一起的不同排法有 48 种，则 $n=$__________.

11. 集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$，$B=\{(x,y)\mid (x-3)^2+(y-4)^2=r^2\}$，其中 $r>0$，若 $A\cap B$ 中有且仅有一个元素，则 r 的值是__________.

12. 设 I 是全集，非空集合 P、Q 满足 $P\subset Q\subset I$. 若含 P、Q 的一个集合运算表达式，使运算结果为空集 $\varnothing$，则这个运算表达式可以是____________________（只要写出一个表达式）.

二、选择题（本大题满分 16 分）本大题共有 4 题，每题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得 4 分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分.

13. 抛物线 $y=-x^2$ 的焦点坐标为

(A) $\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$.　　(B) $\left(0,-\dfrac{1}{4}\right)$.

(C) $\left(\dfrac{1}{4},0\right)$.　　(D) $\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$.

[答]（　　）

14. $x=\sqrt{1-3y^2}$ 所表示的曲线是

(A) 双曲线.　　(B) 椭圆.

(C) 双曲线的一部分.　　(D) 椭圆的一部分.

[答]（　　）

15. “$a=1$”是“函数 $y=\cos^2 ax-\sin^2 ax$ 的最小正周期为 π”的

(A) 充分不必要条件.

(B) 必要不充分条件.

(C) 充要条件.

(D) 既非充分条件也非必要条件.

[答]( )

16. 若 $0<a<1, b<-1$,则函数 $f(x)=a^x+b$ 的图像不经过

(A) 第一象限. (B) 第二象限.

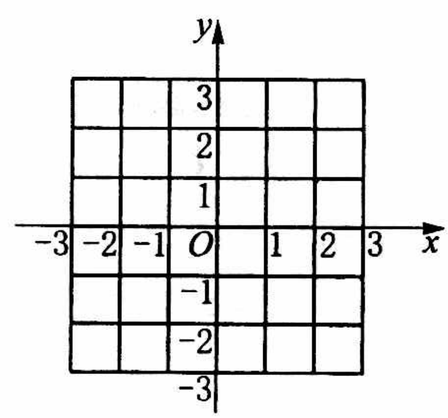
(C) 第三象限. (D) 第四象限.

[答]( )

三、解答题(本大题满分 86 分)本大题共有 6 题,解答下列各题必须写出必要的步骤.

17. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,当 $x\leqslant -1$ 时,$y=f(x)$ 的图像是经过点 $(-2,0)$,斜率为 1 的射线. 又在 $y=f(x)$ 的图像中有一部分是顶点在 $(0,2)$,且过点 $(-1,1)$ 的一段抛物线. 试写出函数 $f(x)$ 的表达式,并作出其图像.



18. (本题满分 12 分)

设复数 z 满足 $|z|=5$,且 $(3+4i)z$ 在复平面上对应的点在第二、四象限的角平分线上,$|\sqrt{2}z-m|=5\sqrt{2}$ $(m\in\mathbf{R})$,求 z 和 m 的值.

19. (本题满分 12 分)

有一批影碟机(VCD)原销售价为每台 800 元,在甲乙两家家电商场均有销售. 甲商场用如下的方法促销:买一台单价为 780 元,买两台每台单价都为 760 元,依次类推,每多买一台则所买各

台单价均再减少 20 元，但每台最低价不能低于 440 元；乙商场一律都按原价的 75% 销售. 某单位需购买一批此类影碟机，问去哪家商场购买花费较少？

20.（本题满分 16 分）本题共有 2 个小题，每小题满分均为 8 分.

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1=-393$，$a_2+a_3=-768$，$\{b_n\}$ 是公比为 $q(0<q<1)$ 的无穷等比数列，$b_1=2$，且 $\{b_n\}$ 的各项和为 20.

(1) 写出 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 试求满足下列不等式的正整数 m：

$$\frac{a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m}}{m+1}\leqslant-160b_2.$$

21.（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分.

四棱锥 $P—ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是一个平行四边形，$\overrightarrow{AB}=\{2,-1,-4\}$，$\overrightarrow{AD}=\{4,2,0\}$，$\overrightarrow{AP}=\{-1,2,-1\}$.

(1) 求证：$PA\perp$ 底面 $ABCD$；

(2) 求四棱锥 $P—ABCD$ 的体积；

(3) 对于向量 $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$，$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$，$\vec{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$，定义一种运算：

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_1y_3z_2-x_2y_1z_3-x_3y_2z_1$.

试计算 $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AP}$ 的绝对值的值；说明其与四棱锥 $P—ABCD$ 体积的关系，并由此猜想向量这一运算 $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AP}$ 的绝对值的几何意义.

22.（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，每小题满分均为 6 分.

如图所示，A、F 分别是椭圆 $\frac{(y+1)^2}{16}+\frac{(x-1)^2}{12}=1$ 的一个顶点与一个焦点，位于 x 轴的正半轴上的动点 $T(t,0)$ 与 F 的连线交

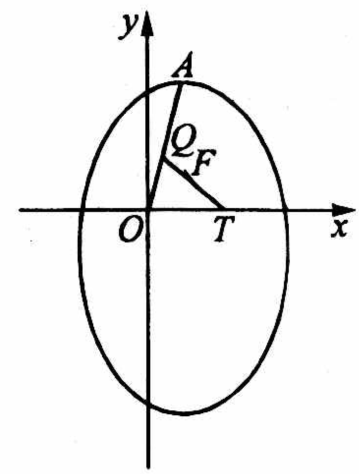
射线 OA 于 Q.

求：

（1）点 A、F 的坐标及直线 TQ 的方程；

（2）$\triangle OTQ$ 的面积 S 与 t 的函数关系式 $S=f(t)$ 及该函数的最小值；

（3）写出 $S=f(t)$ 的单调递增区间，并证明之.



答 案 要 点

一、1. $-\frac{7}{25}$.　2. 1.　3. $x=2$.　4. $\frac{1}{a}$.　5. 60°.　6. $x+2y-1=0$.　7. $\frac{3}{2}$.　8. 45°.　9. $5\sqrt{5}$.　10. 5.　11. 3 或 7.　12. $\overline{Q}\cap P$.

二、

题　号	13	14	15	16
代　号	B	D	A	A

三、17.［解］当 $x\leqslant -1$ 时，设 $f(x)=x+b$，

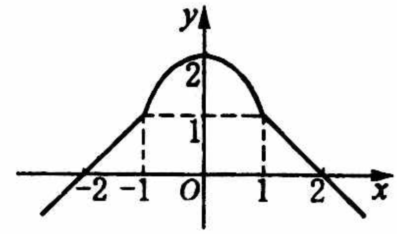
则由 $0=-2+b$，即 $b=2$，得 $f(x)=x+2$；

当 $-1<x<1$ 时，设 $f(x)=ax^2+2$，

则由 $1=a(-1)^2+2$，即 $a=-1$，得 $f(x)=-x^2+2$；

当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=-x+2$.

故 $f(x)=\begin{cases} x+2, & (x\leqslant -1) \\ 2-x^2, & (-1<x<1) \\ -x+2. & (x\geqslant 1) \end{cases}$



18.［解法一］ 设 $z=x+yi$（x、$y\in\mathbf{R}$），

$\because |z|=5$，$\therefore\ x^2+y^2=25$，

而 $(3+4i)z=(3+4i)(x+yi)=(3x-4y)+(4x+3y)i$，

又 $\because\ (3+4i)z$ 在复平面上对应的点在第二、四象限的角平分线上，

$\therefore\ 3x-4y+4x+3y=0$，得 $y=7x$.

$\therefore\ x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},y=\pm\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

即 $z=\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{2}i\right)$；

$\sqrt{2}z=\pm(1+7i)$，

当 $\sqrt{2}z=1+7i$ 时，有 $|1+7i-m|=5\sqrt{2}$，即 $(1-m)^2+7^2=50$，

得 $m=0,m=2$.

当 $\sqrt{2}z=-(1+7i)$ 时，同理可得 $m=0,m=-2$.

［解法二］ $|(3+4i)z|=|3+4i||z|=25$，

$\therefore\ (3+4i)z=25\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$，得 $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{2}i$

或 $(3+4i)z=25\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$，得 $z=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7\sqrt{2}}{2}i\right)$.

当 $\sqrt{2}z=1+7i$ 时，有 $|1+7i-m|=5\sqrt{2}$，即 $(1-m)^2+7^2=50$，

得 $m=0,m=2$.

当 $\sqrt{2}z=-(1+7i)$ 时，同理可得 $m=0,m=-2$.

19.［解］ 设某单位需购买 x 台影碟机，甲乙两商场的购货款的差价为 y，

则∵ 去甲商场购买共花费$(800-20x)x$,据题意,

$800-20x\geqslant 440$,∴ $1\leqslant x\leqslant 18$.

去乙商场购买共花费 $600x$,$x\in\mathbf{N}$.

$$\therefore\quad y=\begin{cases}(800-20x)x-600x,\ (1\leqslant x\leqslant 18)\\ 440x-600x\ (18<x)\end{cases}\quad (x\in\mathbf{N})$$

$$=\begin{cases}200x-20x^2,\ (1\leqslant x\leqslant 18)\\ -160x,\ (18<x)\end{cases}\quad (x\in\mathbf{N})$$

得
$$\begin{cases}y>0,\ (1\leqslant x<10)\\ y=0,\ (x=10)\\ y<0.\ (x>10)\end{cases}\quad (x\in\mathbf{N})$$

故若买少于10台,去乙商场花费较少;若买10台,去甲、乙商场花费一样;若买超过10台,去甲商场花费较少.

20. [解] (1) 设$\{a_n\}$的公差为 d,则 $a_2+a_3=2a_1+3d$,

故 $2\times(-393)+3d=-768$,解得 $d=6$,

∴ $a_n=-393+6(n-1)=6n-399$,

由 $S=\dfrac{2}{1-q}=20$,得 $q=\dfrac{9}{10}$. $b_n=2\cdot\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n-1}$ $(n\in\mathbf{N})$.

(2) ∵
$$a_1+a_2+\cdots+a_m=ma_1+\frac{m(m-1)d}{2}=-393m+3m(m-1),$$

∴
$$\begin{aligned}&a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{2m}\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_{2m})-(a_1+a_2+\cdots+a_m)\\&=-393\times(2m)+6m(2m-1)+393m-3m(m-1)\\&=9m^2-396m.\end{aligned}$$

∵ $-160b_2=-288$,

∴ $9m^2-396m\leqslant -288(m+1)$,$m^2-44m\leqslant -32(m+1)$,

即$(m-4)(m-8)\leqslant 0$,解得 $4\leqslant m\leqslant 8$,又 $m\in\mathbf{N}$,

从而 $m=4,5,6,7,8$.

21. ［解］(1) $\because$ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=-2-2+4=0$，$\therefore$ $AP\perp AB$.

又 $\because$ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=-4+4+0=0$， $\therefore$ $AP\perp AD$.

$\because$ AB、AD 是底面 $ABCD$ 上的两条相交直线.

$\therefore$ $AP\perp$底面 $ABCD$.

(2) 设 $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AD}$的夹角为 θ,则

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|}=\frac{8-2}{\sqrt{4+1+16}\sqrt{16+4}}=\frac{3}{\sqrt{105}}.$$

$$V=\frac{1}{3}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cdot\sin\theta\cdot|\overrightarrow{AP}|$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{105}\sqrt{1-\frac{9}{105}}\sqrt{1+4+1}=16.$$

(3) $|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AP}|=|-4-32-4-8|=48$,

它是四棱锥 P—$ABCD$ 体积的 3 倍.

猜测：$|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AP}|$在几何上可表示以 AB、AD、AP 为棱的平行六面体的体积(或以 AB、AD、AP 为棱的直四棱柱的体积).

22. ［解］(1) A 点的坐标为$(1,3)$,F 点的坐标为$(1,1)$.

当 $t>0$ 且 $t\neq1$ 时,TQ 的方程为 $y=\dfrac{x-t}{1-t}$;

当 $t=1$ 时,TQ 的方程为　$x=1$.

(2) 联立直线 OA 和直线 TQ 的方程：

$$\begin{cases}y=3x,\\ y=\dfrac{x-t}{1-t}\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}y=3x,\\ x=1.\end{cases}$$

得 Q 点的纵坐标 $y_Q=\dfrac{3t}{3t-2}$,$y_Q=3$,

$\because$ $t>0$,且 $y_Q>1$,$\therefore$ $t>\dfrac{2}{3}$,

$\therefore \quad f(t)=\dfrac{3t^2}{2(3t-2)}. \quad \left(t>\dfrac{2}{3}\right)$

$$f(t)=\frac{3t^2}{2(3t-2)}=\frac{(3t)^2}{6(3t-2)}=\frac{(3t-2+2)^2}{6(3t-2)}$$
$$=\frac{1}{6}\left(3t-2+\frac{4}{3t-2}+4\right),$$

$\because \quad t>\dfrac{2}{3}, \quad \therefore \quad 3t-2>0,$

$\therefore \quad f(t)\geqslant\dfrac{1}{6}(2\sqrt{4}+4)=\dfrac{4}{3},$

当且仅当 $t=\dfrac{4}{3}$ 时等号成立，即 $t=\dfrac{4}{3}$ 时，$S=f(t)$ 的最小值为 $\dfrac{4}{3}$.

(3) $f(t)=\dfrac{3t^2}{2(3t-2)}$ 在区间 $\left(\dfrac{4}{3},+\infty\right)$ 上为增函数.

证明：任取 t_1、$t_2\in\left(\dfrac{4}{3},+\infty\right)$，不妨设 $t_2>t_1>\dfrac{4}{3}$，

$$f(t_1)-f(t_2)$$
$$=\frac{1}{6}\left(3t_1-2+\frac{4}{3t_1-2}+4\right)-\frac{1}{6}\left(3t_2-2+\frac{4}{3t_2-2}+4\right)$$
$$=\frac{1}{2}(t_1-t_2)\left[1-\frac{4}{(3t_1-2)(3t_2-2)}\right]$$
$$=\frac{1}{2}(t_1-t_2)\frac{(3t_1-2)(3t_2-2)-4}{(3t_1-2)(3t_2-2)}.$$

$\because \quad t_2>t_1>\dfrac{4}{3},$

$\therefore \quad t_1-t_2<0, (3t_1-2)(3t_2-2)>4, \therefore \quad f(t_1)<f(t_2),$

$\therefore \quad S=f(t)$ 在 $\left(\dfrac{4}{3},+\infty\right)$ 上为增函数.