2000 普通高等学校春季招生考试 (京、皖理)

一、选择题

1. 复数 $z_1=3+\mathrm{i}$, $z_2=1-\mathrm{i}$, 则 $z=z_1\cdot z_2$ 在复平面内的对应点位于 ( )
   (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

2. 设全集 $I=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$, 集合 $M=\{a,\ c,\ d\}$, $N=\{b,\ d,\ e\}$, 那么 $\overline{M}\cap\overline{N}$ 是 ( )
   (A) $\varnothing$ (B) $\{d\}$ (C) $\{a,\ c\}$ (D) $\{b,\ e\}$

3. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 的两条渐近线互相垂直, 那么该双曲线的离心率是 ( )
   (A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\dfrac{3}{2}$

4. 曲线 $xy=1$ 的参数方程是 ( )
   (A) $\begin{cases}x=t^{\frac{1}{2}},\\ y=t^{-\frac{1}{2}}.\end{cases}$ (B) $\begin{cases}x=\sin\alpha,\\ y=\csc\alpha.\end{cases}$
   (C) $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=\sec\alpha.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}x=\tan\alpha,\\ y=\cot\alpha.\end{cases}$

5. 一个圆锥的底面直径和高都同一个球的直径相等, 那么圆锥与球的体积之比是 ( )
   (A) $1:3$ (B) $2:3$ (C) $1:2$ (D) $2:9$

6. 直线 $\theta=a$ 和直线 $\rho\sin(\theta-a)=1$ 的位置关系是
   (A) 垂直 (B) 平行 (C) 相交但不垂直 (D) 重合

7. 函数 $y=\lg|x|$ ( )
   (A) 是偶函数, 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增
   (B) 是偶函数, 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减
   (C) 是奇函数, 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增
   (D) 是奇函数, 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减

8. 从单词"equation"选取 5 个不同的字母排成一排, 含有"qu"(其中"qu"相连且顺序不变) 的不同排列共有 ( )
   (A) 120 个 (B) 480 个 (C) 720 个 (D) 840 个

9. 椭圆短轴长是 2, 长轴长是短轴的 2 倍, 则椭圆中心到其准线距离是 ( )
   (A) $\dfrac{8}{5}\sqrt{5}$ (B) $\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$ (C) $\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$ (D) $\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

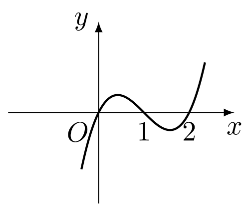
10. 函数 $y=\dfrac{1}{2+\sin x+\cos x}$ 的最大值是 ( )
    (A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1$ (B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1$ (C) $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11. 设复数 $z_1=2\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta$ $\left(\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 在复平面上对应向量 $\overrightarrow{OZ_1}$, 将 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按顺时针方向旋转 $\dfrac{3}{4}\pi$ 后得到向量 $\overrightarrow{OZ_2}$, $\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数为 $z_2=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$, 则 $\tan\varphi=$ ( )
    (A) $\dfrac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}$ (B) $\dfrac{2\tan\theta-1}{2\tan\theta+1}$ (C) $\dfrac{1}{2\tan\theta+1}$ (D) $\dfrac{1}{2\tan\theta-1}$

12. 设 α,β 是一个钝角三角形的两个锐角, 下列四个不等式中不正确的是 ( )
    (A) $\tan\alpha\tan\beta<1$ (B) $\sin\alpha+\sin\beta<\sqrt{2}$
    (C) $\cos\alpha+\cos\beta>1$ (D) $\dfrac{1}{2}\tan(\alpha+\beta)<\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{101}=0$, 则有 ( )
    (A) $a_1+a_{101}>0$ (B) $a_2+a_{100}<0$ (C) $a_3+a_{99}=0$ (D) $a_{51}=51$

14. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图, 则 ( )



    (A) $b\in(-\infty,0)$ (B) $b\in(0,1)$ (C) $b\in(1,2)$ (D) $b\in(2,+\infty)$

二、填空题

15. 函数 $y=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的最小正周期是______.

16. 已知一体积为 72 的正四面体, 连结两个面的重心 E、F, 则线段 EF 的长是______.

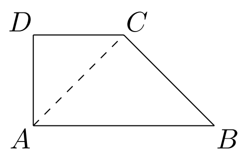
17. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$ 展开式中的常数项是______.

18. 在空间, 下列命题正确的是______. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)
    ① 如果两直线 a、b 分别与直线 l 平行, 那么 $a\parallel b$;
    ② 如果直线 a 与平面 β 内的一条直线 b 平行, 那么 $a\parallel\beta$;
    ③ 如果直线 a 与平面 β 内的两条直线 b、c 都有垂直, 那么 $a\perp\beta$;
    ④ 如果平面 β 内的一条直线 a 垂直平面 γ, 那么 $\beta\perp\gamma$.

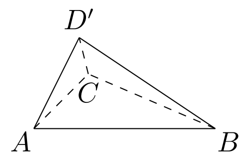
三、解答题

19. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A、B、C 对边分别为 a、b、c, 证明: $\dfrac{a^2-b^2}{c^2}=\dfrac{\sin(A-B)}{\sin C}$.

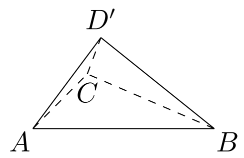
20. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $\angle D=\angle BAD=90^\circ$, $AD=DC=\dfrac{1}{2}AB=a$ (如图一). 将 $\triangle ADC$ 沿 AC 折起, 使 D 到 D'. 记面 ACD' 为 α, 面 ABC 为 β, 面 BCD' 为 γ .
    (1) 若二面角 $\alpha-AC-\beta$ 为直二面角 (如图二), 求二面角 $\beta-BC-\gamma$ 的大小;
    (2) 若二面角 $\alpha-AC-\beta$ 为 60° (如图三), 求三棱锥 $D'-ABC$ 的体积.



图一



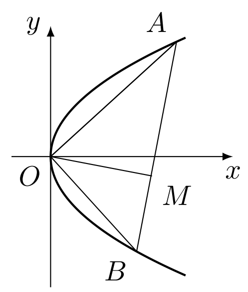
图二



图三

21. 设函数 $f(x)=|\lg x|$, 若 $0<a<b$, 且 $f(a)>f(b)$, 证明: $ab<1$.

22. 如图, 设点 A 和 B 为抛物线 $y^2=4px\ (p>0)$ 上原点以外的两个动点, 已知 $OA\perp OB$, $OM\perp AB$. 求点 M 的轨迹方程, 并说明它表示什么曲线.



23. 某地区上年度电价为 0.8 元/kW · h, 年用电量为 a kW · h 本年度计划将电价降到 0.55 元/kW · h 至 0.75 元/kW · h 之间, 而用户期望电价为 0.4 元/kW · h 经测算, 下调电价后新增的用电量与实际电价和用户期望电价的差成反比 (比例系数为 k). 该地区电力的成本为 0.3 元/kW · h.

(1) 写出本年度电价下调后, 电力部门的收益 y 与实际电价 x 的函数关系式;

(2) 设 $k=0.2a$, 当电价最低定为多少时仍可保证电力部门的收益比上年至少增长 20%?

注: 收益 = 实际用电量 × (实际电价 − 成本价)

24. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right), \\ f_2(x), & x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right], \end{cases}$ 其中 $f_1(x)=-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+1$, $f_2(x)=-2x+2$.

(1) 在下面坐标系上画出 $y=f(x)$ 的图象;

(2) 设 $y=f_2(x)\ \left(x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\right)$ 的反函数为 $y=g(x)$, $a_1=1$, $a_2=g(a_1)$, $\cdots$, $a_n=g(a_{n-1})$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$;

(3) 若 $x_0\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$, $x_1=f(x_0)$, $f(x_1)=x_0$, 求 x_0.