2001 普通高等学校春季招生考试 (京蒙皖理)

一、选择题

1. 集合 $M=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 的子集个数是 ( )

(A) 32 (B) 31 (C) 16 (D) 15

2. 函数 $f(x)=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 对于任意的实数 x, y 都有 ( )

(A) $f(xy)=f(x)f(y)$ (B) $f(xy)=f(x)+f(y)$

(C) $f(x+y)=f(x)f(y)$ (D) $f(x+y)=f(x)+f(y)$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{C}_{2n}^{n}}{\mathrm{C}_{2n+2}^{n+1}}=$ ( )

(A) 0 (B) 2 (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{4}$

4. 函数 $y=-\sqrt{1-x}$ $(x\leqslant 1)$ 的反函数是 ( )

(A) $y=x^2-1$ $(-1\leqslant x\leqslant 0)$ (B) $y=x^2-1$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$

(C) $y=1-x^2$ $(x\leqslant 0)$ (D) $y=1-x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$

5. 极坐标系中, 圆 $\rho=4\cos\theta+3\sin\theta$ 的圆心的坐标是 ( )

(A) $\left(\dfrac{5}{2},\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$ (B) $\left(5,\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$ (C) $\left(5,\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$ (D) $\left(\dfrac{5}{2},\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$

6. 设动点 P 在直线 $x=1$ 上, O 为坐标原点. 以 OP 为直角边、点 O 为直角顶点作等腰 $\mathrm{Rt}\triangle OPQ$, 则动点 Q 的轨迹是 ( )

(A) 圆 (B) 两条平行直线

(C) 抛物线 (D) 双曲线

7. 已知 $f(x^6)=\log_2 x$, 那么 $f(8)$ 等于 ( )

(A) $\dfrac{4}{3}$ (B) 8 (C) 18 (D) $\dfrac{1}{2}$

8. 若 A、B 是锐角 $\triangle ABC$ 的两个内角, 则点 $P(\cos B-\sin A,\sin B-\cos A)$ 在 ( )

(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

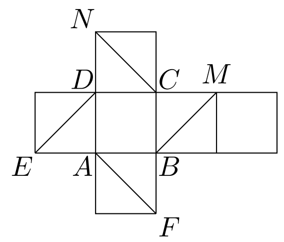
9. 如果圆锥的侧面展开图是半圆, 那么这个圆锥的顶角 (圆锥轴截面中两条母线的夹角) 是 ( )

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

10. 若实数 a, b 满足 $a+b=2$, 则 3^a+3^b 的最小值是 ( )

(A) 18 (B) 6 (C) $2\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt[4]{3}$

11. 如图是正方体的平面展开图. 在这个正方体中, ① BM 与 ED 平行; ② CN 与 BE 是异面直线; ③ CN 与 BM 成 60° 角; ④ DM 与 BN 垂直. 以上四个命题中, 正确命题的序号是 ( )



(A) ①②③ (B) ②④ (C) ③④ (D) ②③④

12. 根据市场调查结果, 预测某种家用商品从年初开始的 n 个月内累积的需求量 S_n (万件) 近似地满足 $S_n=\dfrac{n}{90}(21n-n^2-5)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 12)$. 按此预测, 在本年度内, 需求量超过 1.5 万件的月份是 ( )

(A) 5 月、6 月 (B) 6 月、7 月 (C) 7 月、8 月 (D) 8 月、9 月

二、填空题

13. 已知球内接正方体的表面积为 S, 那么球体积等于______.

14. 椭圆 $x^2+4y^2=4$ 长轴上一个顶点为 A, 以 A 为直角顶点作一个内接于椭圆的等腰直角三角形, 该三角形的面积是______.

15. 已知 $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1$ (α、β、γ 均为锐角), 那么 $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ 的最大值等于______.

16. 已知 m、n 是直线, α、β、γ 是平面, 给出下列命题:

① 若 $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=m$, $n\perp m$, 则 $n\perp\alpha$ 或 $n\perp\beta$;

② 若 $\alpha/\!\!/\beta$, $\alpha\cap\gamma=m$, $\beta\cap\gamma=n$, 则 $m/\!\!/n$;

③ 若 m 不垂直于 α, 则 m 不可能垂直于 α 内的无数条直线;

④ 若 $\alpha\cap\beta=m$, $n/\!\!/m$, 且 $n\not\subset\alpha$, $n\not\subset\beta$, 则 $n/\!\!/\alpha$ 且 $n/\!\!/\beta$.

其中正确的命题的序号是______. (注: 把你认为正确的命题的序号都填上)

三、解答题

17. 设函数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x+b}$ $(a>b>0)$, 求 $f(x)$ 的单调区间, 并证明 $f(x)$ 在其单调区间上的单调性.

18. 已知 $z^7=1$ $(z\in\mathbf{C}$ 且 $z\neq 1$).

(1) 证明 $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0$;

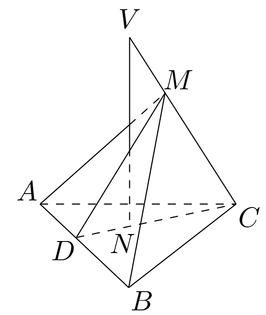
(2) 设 z 的辐角为 α, 求 $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha$ 的值.

19. 已知 VC 是 $\triangle ABC$ 所在平面的一条斜线, 点 N 是 V 在平面 ABC 上的射影, 且在 $\triangle ABC$ 的高 CD 上. $AB=a$, VC 与 AB 之间的距离为 h, 点 $M\in VC$.

(1) 证明 $\angle MDC$ 是二面角 $M-AB-C$ 的平面角;

(2) 当 $\angle MDC=\angle CVN$ 时, 证明 $VC\perp$ 平面 AMB;

(3) 若 $\angle MDC=\angle CVN=\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 求四面体 $MABC$ 的体积.



20. 在 1 与 2 之间插入 n 个正数 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, 使这 $n+2$ 个数成等比数列; 又在 1 与 2 之间插入 n 个正数 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$, 使这 $n+2$ 个数成等差数列. 记 $A_n = a_1a_2a_3\cdots a_n$, $B_n = b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$.
(1) 求数列 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 的通项;
(2) 当 $n \geqslant 7$ 时, 比较 A_n 与 B_n 的大小, 并证明你的结论.

21. 某摩托车生产企业, 上年度生产摩托车的投入成本为 1 万元/辆, 出厂价为 1.2 万元/辆, 年销售量为 1000 辆. 本年度为适应市场需求, 计划提高产品档次, 适度增加投入成本. 若每辆车投入成本增加的比例为 x $(0 < x < 1)$, 则出厂价相应提高的比例为 $0.75x$, 同时预计年销售量增加的比例为 $0.6x$. 已知年利润 = (出厂价 − 投入成本) × 年销售量.
(1) 写出本年度预计的年利润 y 与投入成本增加的比例 x 的关系式;
(2) 为使本年度的年利润比上年有所增加, 问投入成本增加的比例 x 应在什么范围内?

22. 已知抛物线 $y^2 = 2px$ $(p > 0)$. 过动点 $M(a, 0)$ 且斜率为 1 的直线 l 与该抛物线交于不同的两点 A、B, $|AB| \leqslant 2p$.
(1) 求 a 的取值范围;
(2) 若线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 N, 求 $\mathrm{Rt}\triangle NAB$ 面积的最大值.