

2003 普通高等学校春季招生考试 (上海卷)

一、填空题

1. 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} + 1$, 则 $f^{-1}(3) =$ _____.
2. 直线 $y = 1$ 与直线 $y = \sqrt{3}x + 3$ 的夹角为_____.
3. 已知点 $P(\tan \alpha, \cos \alpha)$ 在第三象限, 则角 α 的终边在第_____象限.
4. 直线 $y = x - 1$ 被抛物线 $y^2 = 4x$ 截得线段的中点坐标是_____.
5. 已知集合 $A = \{x \mid |x| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid x \geq a\}$, 且 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是_____.
6. 已知 z 为复数, 则 $z + \bar{z} > 2$ 的一个充要条件是 z 满足_____.
7. 若过两点 $A(-1, 0)$ 、 $B(0, 2)$ 的直线 l 与圆 $(x-1)^2 + (y-a)^2 = 1$ 相切, 则 $a =$ _____.
8. 不等式 $(\lg 20)^{2 \cos x} > 1$ ($x \in (0, \pi)$) 的解为_____.
9. 8 名世界网球顶级选手在上海大师赛上分成两组, 每组各 4 人, 分别进行单循环赛, 每组决出前两名, 再由每组的第一名与另一组的第二名进行淘汰赛, 获胜者角逐冠、亚军, 败者角逐第三、四名, 则该大师赛共有_____场比赛.
10. 若正三棱锥底面边长为 4, 体积为 1, 则侧面和底面所成二面角的大小等于_____. (结果用反三角函数值表示)
11. 若函数 $y = x^2 + (a+2)x + 3$, $x \in [a, b]$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 则 $b =$ _____.
12. 设 $f(x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}}$, 利用课本中推导等差数列前 n 项和的公式的方法, 可求得 $f(-5) + f(-4) + \dots + f(0) + \dots + f(5) + f(6)$ 的值为_____.

二、选择题

13. 关于直线 a, b, l 以及平面 M, N , 下列命题中正确的是 ()
 - (A) 若 $a \parallel M, b \parallel M$, 则 $a \parallel b$
 - (B) 若 $a \parallel M, b \perp a$, 则 $b \perp M$
 - (C) 若 $a \subset M, b \subset M$, 且 $l \perp a, l \perp b$, 则 $l \perp M$
 - (D) 若 $a \perp M, a \parallel N$, 则 $M \perp N$
14. 复数 $z = \frac{m-2i}{1+2i}$ ($m \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位) 在复平面上对应的点不可能位于 ()
 - (A) 第一象限
 - (B) 第二象限
 - (C) 第三象限
 - (D) 第四象限
15. 把曲线 $y \cos x + 2y - 1 = 0$ 先沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位, 再沿 y 轴向下平移一个单位, 得到的曲线方程是 ()
 - (A) $(1-y) \sin x + 2y - 3 = 0$
 - (B) $(y-1) \sin x + 2y - 3 = 0$
 - (C) $(y+1) \sin x + 2y + 1 = 0$
 - (D) $-(y+1) \sin x + 2y + 1 = 0$

16. 关于函数 $f(x) = (\sin x)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{|x|} + \frac{1}{2}$, 有下面四个结论:

- ① $f(x)$ 是奇函数;
- ② 当 $x > 2003$ 时, $f(x) > \frac{1}{2}$ 恒成立;
- ③ $f(x)$ 的最大值是 $\frac{3}{2}$;
- ④ $f(x)$ 的最小值是 $-\frac{1}{2}$.

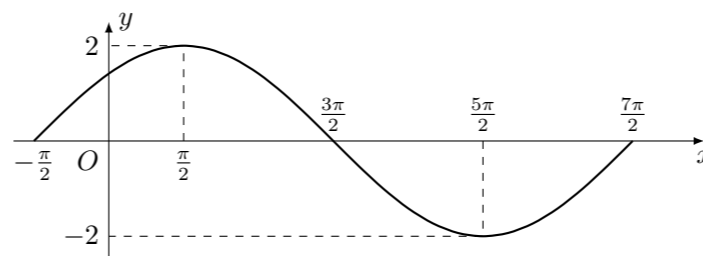
其中正确结论的个数为

- (A) 1 个
- (B) 2 个
- (C) 3 个
- (D) 4 个

三、解答题

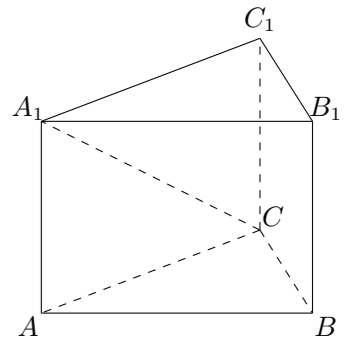
17. 解不等式组:
$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 > 0, \\ \frac{x+3}{x-1} > 2. \end{cases}$$

18. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$, ($A > 0, \omega > 0, x \in \mathbf{R}$) 在一个周期内的图象如图所示, 求直线 $y = \sqrt{3}$ 与函数 $f(x)$ 图象的所有交点的坐标.



19. 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, 在某个空间直角坐标系中, $\overrightarrow{AB} = \left\{ \frac{m}{2}, -\frac{\sqrt{3}m}{2}, 0 \right\}$, $\overrightarrow{AC} = \{m, 0, 0\}$, $\overrightarrow{AA_1} = \{0, 0, n\}$, 其中 $m, n > 0$.

- (1) 证明: 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 是正三棱柱;
- (2) 若 $m = \sqrt{2}n$, 求直线 CA_1 与平面 A_1ABB_1 所成角的大小.



20. 已知函数 $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}}{5}$, $g(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}}{5}$.

(1) 证明 $f(x)$ 是奇函数, 并求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 分别计算 $f(4) - 5f(2)g(2)$ 和 $f(9) - 5f(3)g(3)$ 的值, 由此概括出涉及函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对所有不等于零的实数 x 都成立的一个等式, 并加以证明.

21. 设 F_1 、 F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右两个焦点.

(1) 若椭圆 C 上的点 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 到 F_1 、 F_2 两点的距离之和等于 4, 写出椭圆 C 的方程;

(2) 设 K 是 (1) 中所得椭圆上的动点, 求线段 F_1K 的中点的轨迹方程;

(3) 已知椭圆具有性质: 若 M 、 N 是椭圆 C 上关于原点对称的两个点, 点 P 是椭圆上任意一点, 当直线 PM 、 PN 的斜率都存在, 并记为 k_{PM} 、 k_{PN} 时, 那么 k_{PM} 与 k_{PN} 之积是与点 P 位置无关的定值. 试对双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 写出具有类似特性的性质, 并加以证明.

22. 在一次人才招聘会上, 有 A 、 B 两家公司分别开出了它们的工资标准: A 公司允诺第一个月工资为 1500 元, 以后每月工资比上一年月工资增加 230 元; B 公司允诺第一年月工资数为 2000 元, 以后每月工资在上一年月工资基础上递增 5%, 设某人年初被 A 、 B 两家公司同时录取. 试问:

(1) 若该人分别在 A 公司或 B 公司连续工作 n 年, 则他在第 n 年的月工资收入分别是多少?

(2) 该人打算连续在一家公司工作 10 年, 仅从工资收入总量较多作为应聘的标准 (不记其它因素), 该人应该选择哪家公司, 为什么?

(3) 在 A 公司工作比在 B 公司工作的月工资收入最多可以多多少元? (精确到 1 元), 并说明理由.