2003 普通高等学校春季招生考试 (北京卷理)

一、选择题

1. 若集合 $M=\{y \mid y=2^{-x}\}$, $P=\{y \mid y=\sqrt{x-1}\}$, 则 $M\cap P=$ ( )

(A) $\{y \mid y>1\}$ (B) $\{y \mid y\geqslant 1\}$ (C) $\{y \mid y>0\}$ (D) $\{y \mid y\geqslant 0\}$

2. 若 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$, 则方程 $f(4x)=x$ 的根是 ( )

(A) $\dfrac{1}{2}$ (B) $-\dfrac{1}{2}$ (C) 2 (D) -2

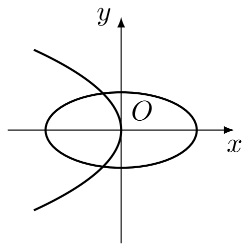
3. 设复数 $z_1=-1+\mathrm{i}$, $z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$, 则 $\arg\dfrac{z_1}{z_2}=$ ( )

(A) $\dfrac{13}{12}\pi$ (B) $\dfrac{7}{12}\pi$ (C) $\dfrac{5}{12}\pi$ (D) $-\dfrac{5}{12}\pi$

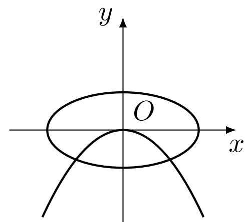
4. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-x(1-x)}$ 的最大值是 ( )

(A) $\dfrac{4}{5}$ (B) $\dfrac{5}{4}$ (C) $\dfrac{3}{4}$ (D) $\dfrac{4}{3}$

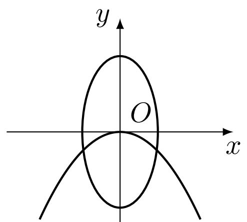
5. 在同一坐标系中, 方程 $a^2x^2+b^2y^2=1$ 与 $ax+by^2=0$ $(a>b>0)$ 的曲线大致是 ( )



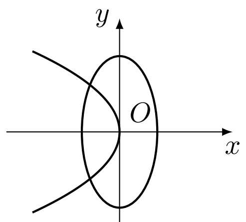
(A)



(B)



(C)



(D)

6. 若 A, B, C 是 $\triangle ABC$ 的三个内角, 且 $A<B<C$ $\left(C\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$, 则下列结论中正确的是 ( )

(A) $\sin A<\sin C$ (B) $\cos A<\cos C$

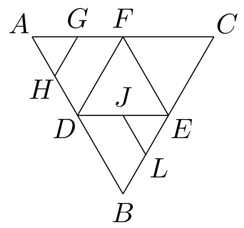
(C) $\tan A<\tan C$ (D) $\cot A<\cot C$

7. 椭圆 $\begin{cases} x=4+5\cos\varphi, \\ y=3\sin\varphi, \end{cases}$ (φ 为参数) 的焦点坐标为 ( )

(A) $(0,0)$, $(0,-8)$ (B) $(0,0)$, $(-8,0)$

(C) $(0,0)$, $(0,8)$ (D) $(0,0)$, $(8,0)$

8. 如图, 在正三角形 ABC 中, D, E, F 分别为各边的中点, G, H, I, J 分别为 AF, AD, BE, DE 的中点. 将 $\triangle ABC$ 沿 DE, EF, DF 折成三棱锥以后, GH 与 IJ 所成角的度数为 ( )



(A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 0°

9. 某班新年联欢会原定的 5 个节目已排成节目单, 开演前又增加了两个新节目. 如果将这两个节目插入原节目单中, 那么不同插法的种数为 ( )

(A) 42 (B) 30 (C) 20 (D) 12

10. 已知直线 $ax+by+c=0$ $(abc\neq 0)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切, 则三条边长分别为 $|a|$, $|b|$, $|c|$ 的三角形 ( )

(A) 是锐角三角形 (B) 是直角三角形

(C) 是钝角三角形 (D) 不存在

11. 若不等式 $|ax+2|<6$ 的解集为 $(-1,2)$, 则实数 a 等于 ( )

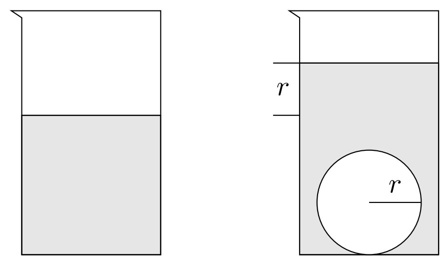
(A) 8 (B) 2 (C) -4 (D) -8

12. 在直角坐标系 xOy 中, 已知 $\triangle AOB$ 三边所在直线的方程分别为 $x=0$, $y=0$, $2x+3y=30$, 则 $\triangle AOB$ 内部和边上整点 (即横、纵坐标均为整数的点) 的总数是 ( )

(A) 95 (B) 91 (C) 88 (D) 75

二、填空题

13. 如图, 一个底面半径为 R 的圆柱形量杯中装有适量的水. 若放入一个半径为 r 的实心铁球, 水面高度恰好升高 r, 则 $\dfrac{R}{r}=$______.



14. 在某报《自测健康状况》的报道中, 自测血压结果与相应年龄的统计数据如下表. 观察表中数据的特点, 用适当的数填入表中空白内.

年龄 (岁)	30	35	40	45	50	55	60	65
收缩压 (水银柱/毫米)	110	115	120	125	130	135		145
舒张压 (水银柱/毫米)	70	73	75	78	80	83		88

15. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点, 点 P 在椭圆上, $\triangle POF_2$ 是面积为 $\sqrt{3}$ 的正三角形, 则 b^2 的值是______.

16. 若存在常数 $p>0$, 使得函数 $f(x)$ 满足 $f(px)=f\left(px-\dfrac{p}{2}\right)$ $(x\in\mathbf{R})$, 则 $f(x)$ 的一个正周期为______.

三、解答题

17. 解不等式: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2)>\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-1$.

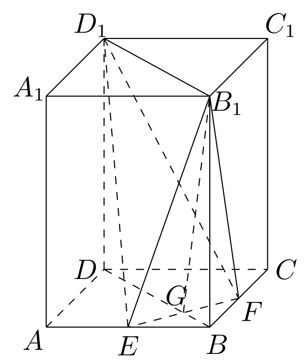
18. 已知函数 $f(x)=\dfrac{6\cos^4x+5\sin^2x-4}{\cos 2x}$, 求 $f(x)$ 的定义域, 判断它的奇偶性, 并求其值域.

19. 如图, 正四棱柱 $ABCD$—$A_1B_1C_1D_1$ 中, 底面边长为 $2\sqrt{2}$, 侧棱长为 4. E, F 分别为棱 AB, BC 的中点, $EF\cap BD=G$.

(1) 求证: 平面 $B_1EF\perp$ 平面 BDD_1B_1;

(2) 求点 D_1 到平面 B_1EF 的距离 d;

(3) 求三棱锥 B_1—EFD_1 的体积 V.



20. 某租赁公司拥有汽车 100 辆. 当每辆车的月租金为 3000 元时, 可全部租出. 当每辆车的月租金每增加 50 元时, 未租出的车将会增加一辆. 租出的车每辆每月需要维护费 150 元, 未租出的车每辆每月需要维护费 50 元.

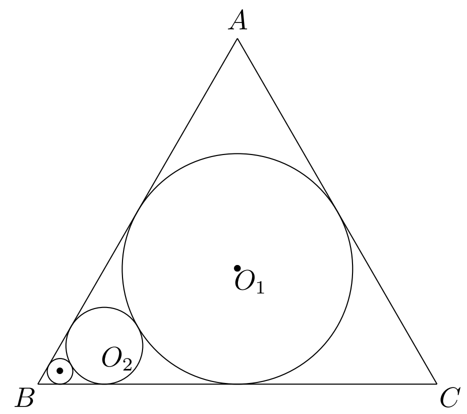
(1) 当每辆车的月租金定为 3600 元时, 能租出多少辆车?

(2) 当每辆车的月租金定为多少元时, 租赁公司的月收益最大? 最大月收益是多少?

21. 如图, 在边长为 l 的等边 $\triangle ABC$ 中, 圆 O_1 为 $\triangle ABC$ 的内切圆, 圆 O_2 与圆 O_1 外切, 且与 AB, BC 相切, $\cdots$, 圆 O_{n+1} 与圆 O_n 外切, 且与 AB, BC 相切, 如此无限继续下去. 记圆 O_n 的面积为 a_n $(n \in \mathbf{N})$.

(1) 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 的值.



22. 已知动圆过定点 $P(1,0)$, 且与定直线 l: $x=-1$ 相切, 点 C 在 l 上.

(1) 求动圆圆心的轨迹 M 的方程;

(2) 设过点 P, 且斜率为 $-\sqrt{3}$ 的直线与曲线 M 相交于 A, B 两点.

① 问: $\triangle ABC$ 能否为正三角形? 若能, 求点 C 的坐标; 若不能, 说明理由;

② 当 $\triangle ABC$ 为钝角三角形时, 求这种点 C 的纵坐标的取值范围.