

2004 普通高等学校春季招生考试 (北京卷理)

一、选择题

- 在函数 $y = \sin 2x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan \frac{x}{2}$ 中, 最小正周期为 π 的函数是 ()
(A) $y = \sin 2x$ (B) $y = \sin x$ (C) $y = \cos x$ (D) $y = \tan \frac{x}{2}$
- 当 $\frac{2}{3} < m < 1$ 时, 复数 $z = (3m - 2) + (m - 1)i$ 在复平面上对应的点位于 ()
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
- 双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程是 ()
(A) $y = \pm \frac{3}{2}x$ (B) $y = \pm \frac{2}{3}x$ (C) $y = \pm \frac{9}{4}x$ (D) $y = \pm \frac{4}{9}x$
- 一个圆锥的侧面积是其底面积的 2 倍, 则该圆锥的母线与底面所成的角为 ()
(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75°
- 在极坐标系中, 圆心在 $(\sqrt{2}, \pi)$ 且过极点的圆的方程为 ()
(A) $\rho = 2\sqrt{2} \cos \theta$ (B) $\rho = -2\sqrt{2} \cos \theta$
(C) $\rho = 2\sqrt{2} \sin \theta$ (D) $\rho = -2\sqrt{2} \sin \theta$
- 已知 $\sin(\theta + \pi) < 0$, $\cos(\theta - \pi) > 0$, 则下列不等关系中必定成立的是 ()
(A) $\tan \frac{\theta}{2} < \cot \frac{\theta}{2}$ (B) $\tan \frac{\theta}{2} > \cot \frac{\theta}{2}$
(C) $\sin \frac{\theta}{2} < \cos \frac{\theta}{2}$ (D) $\sin \frac{\theta}{2} > \cos \frac{\theta}{2}$
- 已知三个不等式: $ab > 0$, $bc - ad > 0$, $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0$ (其中 a, b, c, d 均为实数), 用其中两个不等式作为条件, 余下的一个不等式作为结论组成一个命题, 可组成的正确命题的个数是 ()
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 两个完全相同的长方体的长、宽、高分别为 5 cm, 4 cm, 3 cm, 把它们重叠在一起组成一个新长方体, 在这些新长方体中, 最长的对角线的长度是 ()
(A) $\sqrt{77}$ cm (B) $7\sqrt{2}$ cm (C) $5\sqrt{5}$ cm (D) $10\sqrt{2}$ cm
- 在 100 件产品中有 6 件次品, 现从中任取 3 件产品, 至少有 1 件次品的不同取法的种数是 ()
(A) $C_6^1 C_{94}^2$ (B) $C_6^1 C_{99}^2$ (C) $C_{100}^3 - C_{94}^3$ (D) $A_{100}^3 - A_{94}^3$
- 期中考试以后, 班长算出了全班 40 个人数学成绩的平均分为 M , 如果把 M 当成一个同学的分数, 与原来的 40 个分数一起, 算出这 41 个分数的平均值为 N , 那么 $M : N$ 为 ()
(A) $\frac{40}{41}$ (B) 1 (C) $\frac{41}{40}$ (D) 2

二、填空题

- 若 $f^{-1}(x)$ 为函数 $f(x) = \lg(x + 1)$ 的反函数, 则 $f^{-1}(x)$ 的值域是_____.
- $\frac{\sin(\alpha + 30^\circ) - \sin(\alpha - 30^\circ)}{\cos \alpha}$ 的值为_____.
- 据某校环保小组调查, 某区垃圾量的年增长率为 b , 2003 年产生的垃圾量为 a 吨. 由此预测, 该区下一年的垃圾量为_____吨, 2008 年的垃圾量为_____吨.
- 若直线 $mx + ny - 3 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 3$ 没有公共点, 则 m, n 满足的关系式为_____; 以 (m, n) 为点 P 的坐标, 过点 P 的一条直线与椭圆 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的公共点有_____个.

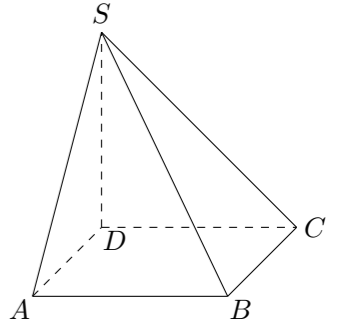
三、解答题

- 当 $0 < a < 1$ 时, 解关于 x 的不等式: $a^{\sqrt{2x-1}} < a^{x-2}$.

- 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的对边长, 已知 a, b, c 成等比数列, 且 $a^2 - c^2 = ac - bc$, 求 $\angle A$ 的大小及 $\frac{b \sin B}{c}$ 的值.

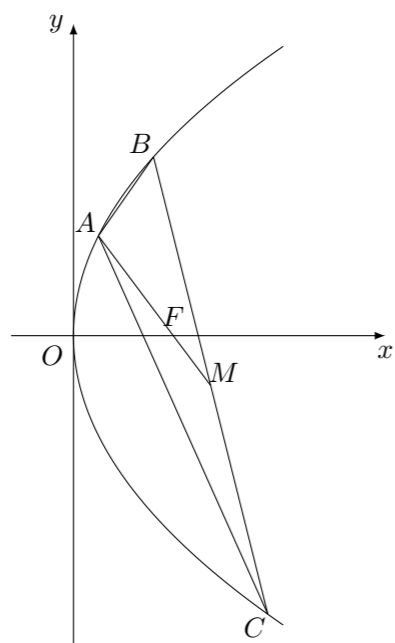
- 如图, 四棱锥 $S - ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形, SD 垂直于底面 $ABCD$, $SB = \sqrt{3}$.

- 求证: $BC \perp SC$;
- 求面 ASD 与面 BSC 所成二面角的大小;
- 设棱 SA 的中点为 M , 求异面直线 DM 与 SB 所成的角的大小.



18. 已知点 $A(2, 8)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$ 在抛物线 $y^2 = 2px$ 上, $\triangle ABC$ 的重心与此抛物线的焦点 F 重合 (如图).

- (1) 写出该抛物线的方程和焦点 F 的坐标;
- (2) 求线段 BC 中点 M 的坐标;
- (3) 求 BC 所在直线的方程.



19. 某厂生产某种零件, 每个零件的成本为 40 元, 出厂单价定为 60 元, 该厂为鼓励销售商订购, 决定当一次订购量超过 100 个时, 每多订购一个, 订购的全部零件的出厂单价就降低 0.02 元, 但实际出厂单价不能低于 51 元.

- (1) 当一次订购量为多少个时, 零件的实际出厂单价恰降为 51 元?
- (2) 设一次订购量为 x 个, 零件的实际出厂单价为 P 元, 写出函数 $P = f(x)$ 的表达式;
- (3) 当销售商一次订购 500 个零件时, 该厂获得的利润是多少元? 如果订购 1000 个, 利润又是多少元? (工厂售出一个零件的利润 = 实际出厂单价 - 成本)

20. 下表给出一个“等差数阵”:

4	7	()	()	()	...	a_{1j}	...
7	12	()	()	()	...	a_{2j}	...
()	()	()	()	()	...	a_{3j}	...
()	()	()	()	()	...	a_{4j}	...
...
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	...	a_{ij}	...
...

其中每行、每列都是等差数列, a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的数.

- (1) 写出 a_{45} 的值;
- (2) 写出 a_{ij} 的计算公式;
- (3) 证明: 正整数 N 在该等差数阵中的充要条件是 $2N + 1$ 可以分解成两个不是 1 的正整数之积.