

## 2005 普通高等学校春季招生考试 (上海卷)

### 一、填空题

1. 方程  $\lg x^2 - \lg(x+2) = 0$  的解集是\_\_\_\_\_.
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{1+2+\dots+n} =$ \_\_\_\_\_.
3. 若  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ , 且  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 则  $\tan \frac{\alpha}{2} =$ \_\_\_\_\_.
4. 函数  $f(x) = -x^2 (x \in (-\infty, -2])$  的反函数  $f^{-1}(x) =$ \_\_\_\_\_.
5. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = BC = 4$ , 则  $\vec{BA} \cdot \vec{BC} =$ \_\_\_\_\_.
6. 某班共有 40 名学生, 其中只有一对双胞胎, 若从中一次随机抽查三位学生的作业, 则这对双胞胎的作业同时被抽中的概率是\_\_\_\_\_. (结果用最简分数表示)
7. 双曲线  $9x^2 - 16y^2 = 1$  的焦距是\_\_\_\_\_.
8. 若  $(x+2)^n = x^n + \dots + ax^3 + bx^2 + cx + 2^n (n \in \mathbf{N}, n \geq 3)$ , 且  $a : b = 3 : 2$ , 则  $n =$ \_\_\_\_\_.
9. 设数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n (n \in \mathbf{N})$ . 关于数列  $\{a_n\}$  有下列三个命题:
  - ① 若  $\{a_n\}$  既是等差数列又是等比数列, 则  $a_n = a_{n+1} (n \in \mathbf{N})$ ;
  - ② 若  $S_n = an^2 + bn (a, b \in \mathbf{R})$ , 则  $\{a_n\}$  是等差数列;
  - ③ 若  $S_n = 1 - (-1)^n$ , 则  $\{a_n\}$  是等比数列.
 这些命题中, 真命题的序号是\_\_\_\_\_.
10. 若集合  $A = \{x \mid 3 \cos 2\pi x = 3^x, x \in \mathbf{R}\}$ , 集合  $B = \{y \mid y^2 = 1, y \in \mathbf{R}\}$ , 则  $A \cap B =$ \_\_\_\_\_.
11. 函数  $y = \sin x + \arcsin x$  的值域是\_\_\_\_\_.
12. 已知函数  $f(x) = 2^x + \log_2 x$ , 数列  $\{a_n\}$  的通项公式是  $a_n = 0.1n (n \in \mathbf{N})$ , 当  $|f(a_n) - 2005|$  取得最小值时,  $n =$ \_\_\_\_\_.

### 二、选择题

13. 已知直线  $l, m, n$  及平面  $\alpha$ , 下列命题中的假命题是 ( )
  - (A) 若  $l \parallel m, m \parallel n$ , 则  $l \parallel n$
  - (B) 若  $l \perp \alpha, n \parallel \alpha$ , 则  $l \perp n$
  - (C) 若  $l \perp m, m \parallel n$ , 则  $l \perp n$
  - (D) 若  $l \parallel \alpha, n \parallel \alpha$ , 则  $l \parallel n$
14. 在  $\triangle ABC$  中, 若  $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$ , 则  $\triangle ABC$  是 ( )
  - (A) 直角三角形
  - (B) 等边三角形
  - (C) 钝角三角形
  - (D) 等腰直角三角形
15. 若  $a, b, c$  是常数, 则“ $a > 0$  且  $b^2 - 4ac < 0$ ”是“对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $ax^2 + bx + c > 0$ ”的 ( )
  - (A) 充分不必要条件
  - (B) 必要不充分条件
  - (C) 充要条件
  - (D) 既不充分也不必要条件

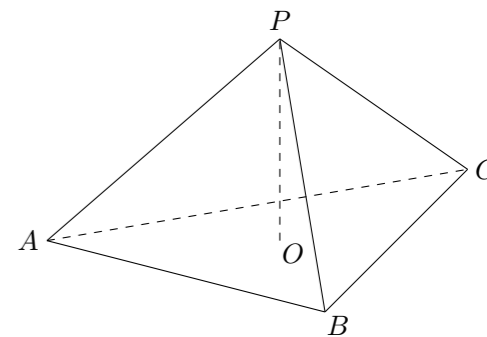
16. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 有下列三个命题:
  - ① 若存在常数  $M$ , 使得对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $f(x) \leq M$ , 则  $M$  是函数  $f(x)$  的最大值;
  - ② 若存在  $x_0 \in \mathbf{R}$ , 使得对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 且  $x \neq x_0$ , 有  $f(x) < f(x_0)$ , 则  $f(x_0)$  是函数  $f(x)$  的最大值;
  - ③ 若存在  $x_0 \in \mathbf{R}$ , 使得对任意  $x \in \mathbf{R}$ , 有  $f(x) \leq f(x_0)$ , 则  $f(x_0)$  是函数  $f(x)$  的最大值.
 这些命题中, 真命题的个数是 ( )
  - (A) 0 个
  - (B) 1 个
  - (C) 2 个
  - (D) 3 个

### 三、解答题

17. 已知  $z$  是复数,  $z + 2i, \frac{z}{2-i}$  均为实数 ( $i$  为虚数单位), 且复数  $(z + ai)^2$  在复平面上对应的点在第一象限, 求实数  $a$  的取值范围.

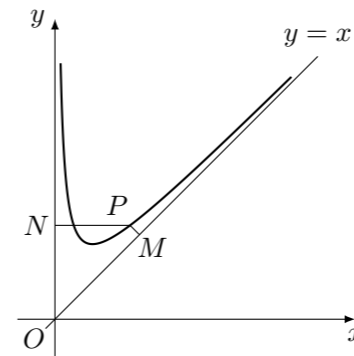
18. 已知  $\tan \alpha$  是方程  $x^2 + 2x \sec \alpha + 1 = 0$  的两个根中较小的根, 求  $\alpha$  的值.

19. 已知正三棱锥  $P-ABC$  的体积为  $72\sqrt{3}$ , 侧面与底面所成的二面角的大小为  $60^\circ$ .
  - (1) 证明:  $PA \perp BC$ ;
  - (2) 求底面中心  $O$  到侧面的距离.



20. 某市 2004 年底有住房面积 1200 万平方米, 计划从 2005 年起, 每年拆除 20 万平方米的旧住房. 假定该市每年新建住房面积是上年年底住房面积的 5%.
- (1) 分别求 2005 年底和 2006 年底的住房面积;
  - (2) 求 2024 年底的住房面积. (计算结果以万平方米为单位, 且精确到 0.01)

21. 已知函数  $f(x) = x + \frac{a}{x}$  的定义域为  $(0, +\infty)$ , 且  $f(2) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ . 设点  $P$  是函数图象上的任意一点, 过点  $P$  分别作直线  $y = x$  和  $y$  轴的垂线, 垂足分别为  $M$ 、 $N$ .
- (1) 求  $a$  的值;
  - (2) 问:  $|PM| \cdot |PN|$  是否为定值? 若是, 则求出该定值, 若不是, 则说明理由;
  - (3) 设  $O$  为坐标原点, 求四边形  $OMPN$  面积的最小值.



22. (1) 求右焦点坐标是  $(2, 0)$ , 且经过点  $(-2, -\sqrt{2})$  的椭圆的标准方程;
- (2) 已知椭圆  $C$  的方程是  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ). 设斜率为  $k$  的直线  $l$ , 交椭圆  $C$  于  $A$ 、 $B$  两点,  $AB$  的中点为  $M$ . 证明: 当直线  $l$  平行移动时, 动点  $M$  在一条过原点的定直线上;
- (3) 利用 (2) 所揭示的椭圆几何性质, 用作图方法找出下面给定椭圆的中心, 简要写出作图步骤, 并在图中标出椭圆的中心.

