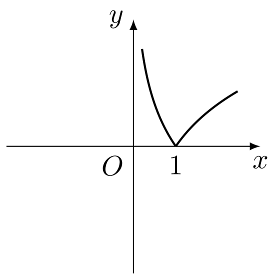
2005 普通高等学校春季招生考试 (北京卷理)

一、选择题

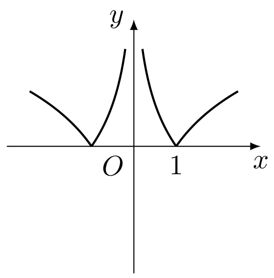
1. $\mathrm{i}-2$ 的共轭复数是 ( )

(A) $2+\mathrm{i}$ (B) $2-\mathrm{i}$ (C) $-2+\mathrm{i}$ (D) $-2-\mathrm{i}$

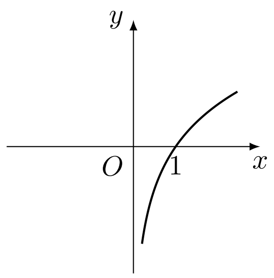
2. 函数 $y=|\log_2 x|$ 的图象是 ( )



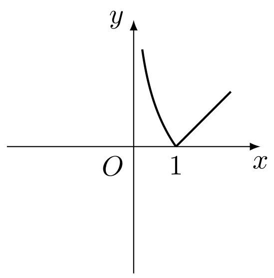
(A)



(B)



(C)



(D)

3. 有如下三个命题:

① 分别在两个平面内的两条直线一定是异面直线;

② 垂直于同一个平面的两条直线是平行直线;

③ 过平面 α 的一条斜线有一个平面与平面 α 垂直.

其中正确命题的个数为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

4. 如果函数 $f(x)=\sin(\pi x+\theta)$ $(0<\theta<2\pi)$ 的最小正周期是 T, 且当 $x=2$ 时取得最大值, 那么 ( )

(A) $T=2,\ \theta=\dfrac{\pi}{2}$ (B) $T=1,\ \theta=\pi$

(C) $T=2,\ \theta=\pi$ (D) $T=1,\ \theta=\dfrac{\pi}{2}$

5. 设 $abc\neq 0$, "$ac>0$"是"曲线 $ax^2+by^2=c$ 为椭圆"的 ( )

(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

6. 已知双曲线的两个焦点为 $F_1(-\sqrt{5},0)$, $F_2(\sqrt{5},0)$, P 是此双曲线上的一点, 且 $PF_1\perp PF_2$, $|PF_1|\cdot|PF_2|=2$, 则该双曲线的方程是 ( )

(A) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=1$ (B) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$ (C) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ (D) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $2\sin A\cos B=\sin C$, 那么 $\triangle ABC$ 一定是 ( )

(A) 直角三角形 (B) 等腰三角形

(C) 等腰直角三角形 (D) 正三角形

8. 若不等式 $(-1)^n a<2+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 对于任意正整数 n 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $\left[-2,\dfrac{3}{2}\right)$ (B) $\left(-2,\dfrac{3}{2}\right)$ (C) $\left[-3,\dfrac{3}{2}\right)$ (D) $\left(-3,\dfrac{3}{2}\right)$

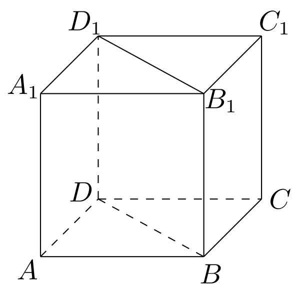
二、填空题

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n}{2n^2-3}=$______.

10. 已知 $\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, 那么 $\sin\theta$ 的值为______, $\cos 2\theta$ 的值为______.

11. 若圆 $x^2+y^2+mx-\dfrac{1}{4}=0$ 与直线 $y=-1$ 相切, 且其圆心在 y 轴的左侧, 则 m 的值为______.

12. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a, 将该正方体沿对角面 BB_1D_1D 切成两块, 再将这两块拼接成一个不是正方体的四棱柱, 那么所得四棱柱的全面积为______.



13. 从 -1, 0, 1, 2 这四个数中选三个不同的数作为函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的系数, 可组成不同的二次函数共有______个, 其中不同的偶函数共有______个. (用数字作答)

14. 若关于 x 的不等式 $x^2-ax-a>0$ 的解集为 $(-\infty,+\infty)$, 则实数 a 的取值范围是______; 若关于 x 的不等式 $x^2-ax-a\leqslant -3$ 的解集不是空集, 则实数 a 的取值范围是______.

三、解答题

15. 设函数 $f(x)=\lg(2x-3)$ 的定义域为集合 M, 函数 $g(x)=\sqrt{1-\dfrac{2}{x-1}}$ 的定义域为集合 N. 求:

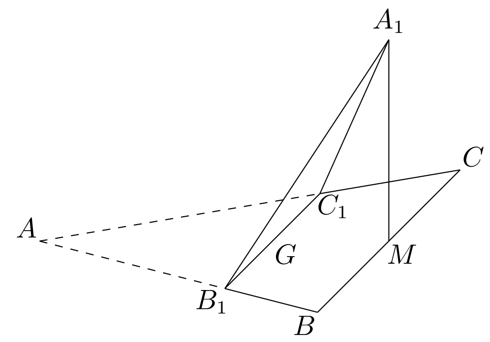
(1) 集合 M, N;

(2) 集合 $M\cap N$, $M\cup N$.

16. 如图, 正三角形 ABC 的边长为 3, 过其中心 G 作 BC 边的平行线, 分别交 AB、AC 于 B_1、C_1. 将 $\triangle AB_1C_1$ 沿 B_1C_1 折起到 $\triangle A_1B_1C_1$ 的位置, 使点 A_1 在平面 BB_1C_1C 上的射影恰是线段 BC 的中点 M. 求:

(1) 二面角 $A_1-B_1C_1-M$ 的大小;

(2) 异面直线 A_1B_1 与 CC_1 所成角的大小. (用反三角函数表示)



17. 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_1=2$, $a_3=18$; $\{b_n\}$ 是等差数列, $b_1=2$, $b_1+b_2+b_3+b_4=a_1+a_2+a_3>20$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的公式;

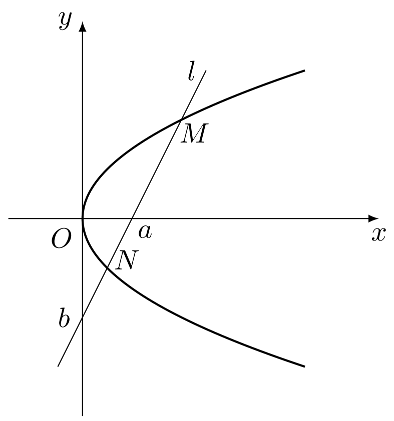
(3) 设 $P_n=b_1+b_4+b_7+\cdots+b_{3n-2}$, $Q_n=b_{10}+b_{12}+b_{14}+\cdots+b_{2n+8}$, 其中 $n=1,2,\cdots$, 试比较 P_n 与 Q_n 的大小, 并证明你的结论.

18. 如图, O 为坐标原点, 直线 l 在 x 轴和 y 轴上的截距分别是 a 和 b, 且交抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 于 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$ 两点.

(1) 写出直线 l 的截距式方程;

(2) 证明: $\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}=\dfrac{1}{b}$;

(3) 当 $a=2p$ 时, 求 $\angle MON$ 的大小.



19. 经过长期观测得到: 在交通繁忙的时段内, 某公路段汽车的车流量 y (千辆/小时) 与汽车的平均速度 v (千米/小时) 之间的函数关系为: $y=\dfrac{920v}{v^2+3v+1600}\ (v>0)$.

(1) 在该时段内, 当汽车的平均速度 v 为多少时, 车流量最大? 最大车流量为多少? (精确到 0.1 千辆/小时)

(2) 若要求在该时段内车流量超过 10 千辆/小时, 则汽车站的平均速度应在什么范围内?

20. 现有一组互不相同且从小到大排列的数据: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, 其中 $a_0=0$. 为提取反映数据间差异程度的某种指标, 今对其进行如下加工: 记 $T=a_0+a_1+\cdots+a_5$, $x_n=\dfrac{n}{5}$, $y_n=\dfrac{1}{T}(a_0+a_1+\cdots+a_n)$, 作函数 $y=f(x)$, 使其图象为逐点依次连接点 $P_n(x_n,y_n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ 的折线.

(1) 求 $f(0)$ 和 $f(1)$ 的值;

(2) 设 $P_{n-1}P_n$ 的斜率为 k_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$, 判断 k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 的大小关系;

(3) 证明: 当 $x\in(0,1)$ 时, $f(x)<x$;

(4) 求由函数 $y=x$ 与 $y=f(x)$ 的图象所围成图形的面积. (用 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 表示)