2006年上海市普通高等学校春季招生考试

数学试卷

考生注意：1. 答卷前，考生务必将姓名、高考座位号、校验码等填写清楚.

2. 本试卷共有22道试题，满分150分. 考试时间120分钟.

一、填空题(本大题满分48分)本大题共有12题，只要求直接填写结果，每题填对得4分，否则一律得零分.

1. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{4n+3}=$________.

2. 方程$\log_3(2x-1)=1$的解$x=$________.

3. 函数$f(x)=3x+5$, $x\in[0,1]$的反函数$f^{-1}(x)=$________.

4. 不等式$\dfrac{1-2x}{x+1}>0$的解集是________.

5. 已知圆$C:(x+5)^2+y^2=r^2\ (r>0)$和直线$l: 3x+y+5=0$. 若圆C与直线l没有公共点, 则r的取值范围是________.

6. 已知函数$f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的偶函数. 当$x\in(-\infty,0)$时, $f(x)=x-x^4$, 则当$x\in(0,+\infty)$时, $f(x)=$________.

7. 电视台连续播放6个广告, 其中含4个不同的商业广告和2个不同的公益广告, 要求首尾必须播放公益广告, 则共有________种不同的播放方式(结果用数值表示).

8. 正四棱锥底面边长为4, 侧棱长为3, 则其体积为________.

9. 在$\triangle ABC$中, 已知$BC=8, AC=5$, 三角形面积为12, 则$\cos 2C=$________.

10. 若向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夹角为150°, $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=4$, 则$|2\vec{a}+\vec{b}|=$________.

11. 已知直线l过点$P(2,1)$, 且与x轴、y轴的正半轴分别交于A、B两点, O为坐标原点, 则三角形OAB面积的最小值为________.

12. 同学们都知道, 在一次考试后, 如果按顺序去掉一些高分, 那么班级的平均分将降低; 反之, 如果按顺序去掉一些低分, 那么班级的平均分将提高. 这两个事实可以用数学语言描述为: 若有限数列$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$, 则____________________________(结论用数学式子表示).

二、选择题(本大题满分16分)本大题共有4题，每题都给出四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得4分，否则一律得零分.

13. 抛物线$y^2=4x$的焦点坐标为

(A) (0, 1).　　(B) (1, 0).

(C) (0, 2).　　(D) (2, 0).

[答]( )

14. 若a、b、$c\in\mathbf{R}$, $a>b$, 则下列不等式成立的是

(A) $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.　　(B) $a^2>b^2$.

(C) $\dfrac{a}{c^2+1}>\dfrac{b}{c^2+1}$.

(D) $a|c|>b|c|$.

[答]( )

15. 若$k\in\mathbf{R}$, 则“$k>3$”是“方程$\dfrac{x^2}{k-3}-\dfrac{y^2}{k+3}=1$表示双曲线”的

(A) 充分不必要条件.

(B) 必要不充分条件.

(C) 充要条件.

(D) 既不充分也不必要条件.

[答]( )

16. 若集合$A=\left\{y\,\middle|\,y=x^{\frac{1}{3}},-1\leqslant x\leqslant 1\right\}$, $B=\left\{y\,\middle|\,y=2-\dfrac{1}{x},0<x\leqslant 1\right\}$, 则$A\cap B$等于……………………( )

(A) $(-\infty,1]$.　　(B) $[-1,1]$.

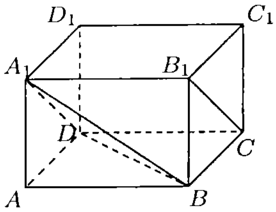
(C) $\varnothing$.　　(D) $\{1\}$.

[答]( )

三、解答题(本大题满分86分)本大题共有6题，解答下列各题必须写出必要的步骤.

17. **(本题满分12分)**

在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中, 已知$DA=DC=4, DD_1=3$, 求异面直线A_1B与B_1C所成角的大小(结果用反三角函数值表示).



18. **(本题满分12分)**

已知复数w满足$w-4=(3-2w)\,\mathrm{i}$ (i为虚数单位), $z=\frac{5}{w}+|w-2|$, 求一个以z为根的实系数一元二次方程.

19. **(本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分8分, 第2小题满分6分.**

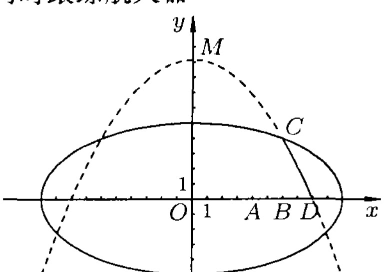
已知函数$f(x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2\cos x$, $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

(1) 若$\sin x=\frac{4}{5}$, 求函数$f(x)$的值;

(2) 求函数$f(x)$的值域.

20. **(本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.**

学校科技小组在计算机上模拟航天器变轨返回试验. 设计方案如图: 航天器运行(按顺时针方向)的轨迹方程为$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$, 变轨(即航天器运行轨迹由椭圆变为抛物线)后返回的轨迹是以y轴为对称轴、$M\left(0,\frac{64}{7}\right)$为顶点的抛物线的实线部分, 降落点为$D(8,0)$. 观测点$A(4,0)$、$B(6,0)$同时跟踪航天器.



(1) 求航天器变轨后的运行轨迹所在的曲线方程;

(2) 试问: 当航天器在x轴上方时, 观测点A、B测得离航天器的距离分别为多少时, 应向航天器发出变轨指令?

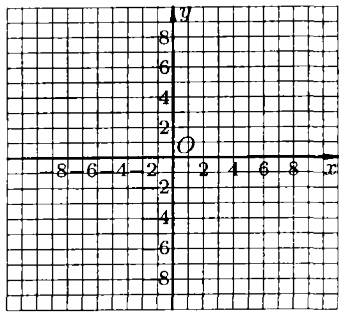
21. **(本题满分16分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分.**

设函数$f(x)=|x^2-4x-5|$.

(1) 在区间$[-2,6]$上画出函数$f(x)$的图象;

(2) 设集合$A=\{x|f(x)\geqslant 5\}$, $B=(-\infty,-2]\cup[0,4]\cup[6,+\infty)$. 试判断集合$A$和$B$之间的关系, 并给出证明;

(3) 当$k>2$时, 求证: 在区间$[-1,5]$上, $y=k(x+3)$的图象位于函数$f(x)$图象的上方.



22. **(本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分8分, 第3小题满分6分.**

已知数列$a_1,a_2,\cdots,a_{30}$, 其中$a_1,a_2,\cdots,a_{10}$是首项为1, 公差为1的等差数列; $a_{10},a_{11},\cdots,a_{20}$是公差为$d$的等差数列; $a_{20},a_{21},\cdots,a_{30}$是公差为$d^2$的等差数列($d\neq 0$).

(1) 若$a_{20}=40$, 求d;

(2) 试写出a_{30}关于d的关系式, 并求a_{30}的取值范围;

(3) 续写已知数列, 使得$a_{30},a_{31},\cdots,a_{40}$是公差为$d^3$的等差数列, ……, 依次类推, 把已知数列推广为无穷数列. 提出同(2)类似的问题((2)应当作为特例), 并进行研究, 你能得到什么样的结论?

参考答案

一、(第1至12题)

1. $\frac{3}{4}$. 2. 2. 3. $\frac{1}{3}(x-5), x\in[5,8]$.

4. $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$. 5. $(0,\sqrt{10})$.

6. $-x-x^4$. 7. 48.

8. $\frac{16}{3}$. 9. $\frac{7}{25}$. 10. 2. 11. 4.

12. $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

$(1 \leqslant m < n)$ 和 $\frac{a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n}{n-m}$ $\geqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ $(1 \leqslant m < n)$.

二、(第13至16题)

题号	13	14	15	16
代号	B	C	A	B

三、(第17至22题)

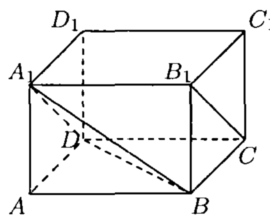
17. [解法一] 连接A_1D, $\because A_1D /\!/ B_1C$,

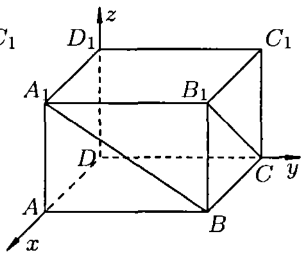
$\therefore \angle BA_1D$为异面直线A_1B与B_1C所成的角.

连接BD, 在$\triangle A_1DB$中, $A_1B=A_1D=5$, $BD=4\sqrt{2}$, 则

$\cos\angle BA_1D = \frac{A_1B^2+A_1D^2-BD^2}{2\cdot A_1B\cdot A_1D} = \frac{25+25-32}{2\cdot5\cdot5} = \frac{9}{25}$.

$\therefore$ 异面直线A_1B与B_1C所成角的大小为$\arccos\frac{9}{25}$.





[解法二]以D为坐标原点, 分别以DA、DC、DD_1所在直线为x轴、y轴、z轴, 建立空间直角坐标系. 则

$A_1(4,0,3)$、$B(4,4,0)$、$B_1(4,4,3)$、$C(0,4,0)$,

得$\overrightarrow{A_1B}=(0,4,-3)$, $\overrightarrow{B_1C}=(-4,0,-3)$.

设$\overrightarrow{A_1B}$与$\overrightarrow{B_1C}$的夹角为θ,

则$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{B_1C}}{|\overrightarrow{A_1B}|\cdot|\overrightarrow{B_1C}|} = \frac{9}{25}$,

$\therefore \overrightarrow{A_1B}$与$\overrightarrow{B_1C}$的夹角大小为$\arccos\frac{9}{25}$,

即异面直线A_1B与B_1C所成角的大小为$\arccos\frac{9}{25}$.

18. [解法一] $\because w(1+2\mathrm{i})=4+3\mathrm{i}$,

$\therefore w=\frac{4+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=2-\mathrm{i}$,

$\therefore z=\frac{5}{2-\mathrm{i}}+|-\mathrm{i}|=3+\mathrm{i}$.

若实系数一元二次方程有虚根$z=3+\mathrm{i}$, 则必有共轭虚根$\bar{z}=3-\mathrm{i}$.

$\because z+\bar{z}=6, z\cdot\bar{z}=10$,

$\therefore$ 所求的一个一元二次方程可以是$x^2-6x+10=0$.

[解法二] 设$w=a+b\mathrm{i}, (a、b\in\mathbf{R})$

$a+b\mathrm{i}-4=3\mathrm{i}-2a\mathrm{i}+2b$,

得$\begin{cases} a-4=2b, \\ b=3-2a, \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a=2, \\ b=-1, \end{cases}$

$\therefore w=2-\mathrm{i}$,

以下解法同[解法一].

19. [解](1) $\because \sin x=\frac{4}{5}, x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$,

$\therefore \cos x=-\frac{3}{5}$,

$f(x)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)-2\cos x$

$=\sqrt{3}\sin x-\cos x$

$=\frac{4}{5}\sqrt{3}+\frac{3}{5}$.

(2) $f(x)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,

$\because \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi$,

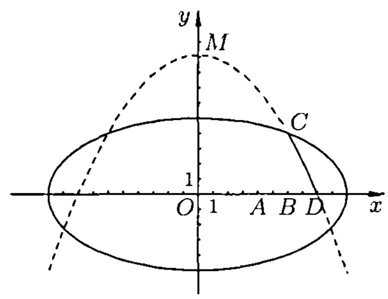
$\therefore \frac{\pi}{3}\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$, $\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant1$,

$\therefore$ 函数$f(x)$的值域为$[1,2]$.

20. [解](1) 设曲线方程为$y=ax^2+\frac{64}{7}$,

由题意可知, $0=a\cdot64+\frac{64}{7}$. $\therefore a=-\frac{1}{7}$.

$\therefore$ 曲线方程为$y=-\frac{1}{7}x^2+\frac{64}{7}$.



(2) 设变轨点为$C(x,y)$, 根据题意可知

$$\begin{cases} \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1, & (1) \\ y=-\frac{1}{7}x^2+\frac{64}{7}, & (2) \end{cases}$$

得$4y^2-7y-36=0$,

$y=4$或$y=-\frac{9}{4}$(不合题意, 舍去).

$\therefore y=4$.

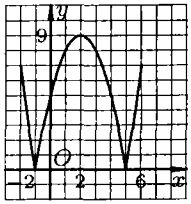
得$x=6$或$x=-6$(不合题意, 舍去).

$\therefore C$点的坐标为$(6,4)$,

$|AC|=2\sqrt{5}$, $|BC|=4$.

答:当观测点A、B测得AC、BC距离分别为$2\sqrt{5}$、4时, 应向航天器发出变轨指令.

21. [解](1)



(2) 方程 $f(x)=5$ 的解分别是 $2-\sqrt{14}, 0, 4$ 和 $2+\sqrt{14}$, 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 和 $[2,5]$ 上单调递减, 在 $[-1,2]$ 和 $[5,+\infty)$ 上单调递增, 因此

$A=(-\infty,2-\sqrt{14}]\cup[0,4]\cup[2+\sqrt{14},+\infty)$.

由于 $2+\sqrt{14}<6$, $2-\sqrt{14}>-2$,

$\therefore B\subset A$.

(3) [解法一] 当 $x\in[-1,5]$ 时,

$f(x)=-x^2+4x+5$.

$$g(x)=k(x+3)-(-x^2+4x+5)$$
$$=x^2+(k-4)x+(3k-5)$$
$$=\left(x-\frac{4-k}{2}\right)^2-\frac{k^2-20k+36}{4},$$

$\because k>2$, $\therefore \dfrac{4-k}{2}<1$. 又 $-1\leqslant x\leqslant 5$,

① 当 $-1\leqslant\dfrac{4-k}{2}<1$, 即 $2<k\leqslant 6$ 时, 取 $x=\dfrac{4-k}{2}$, $g(x)_{\min}=-\dfrac{k^2-20k+36}{4}=-\dfrac{1}{4}[(k-10)^2-64]$.

$\because 16\leqslant(k-10)^2<64$,

$\therefore (k-10)^2-64<0$,

则 $g(x)_{\min}>0$.

② 当 $\dfrac{4-k}{2}<-1$, 即 $k>6$ 时, 取 $x=-1$, $g(x)_{\min}=2k>0$.

由①、②可知, 当 $k>2$ 时, $g(x)>0$, $x\in[-1,5]$.

因此, 在区间 $[-1,5]$ 上, $y=k(x+3)$ 的图象位于函数 $f(x)$ 图象的上方.

[解法二] 当 $x\in[-1,5]$ 时,

$f(x)=-x^2+4x+5$.

由 $\begin{cases} y=k(x+3), \\ y=-x^2+4x+5, \end{cases}$ 得

$x^2+(k-4)x+(3k-5)=0$,

令 $\Delta=(k-4)^2-4(3k-5)=0$, 解得 $k=2$ 或 $k=18$,

在区间 $[-1,5]$ 上, 当 $k=2$ 时, $y=2(x+3)$ 的图象与函数 $f(x)$ 的图象只交于一点 $(1,8)$; 当 $k=18$ 时, $y=18(x+3)$ 的图象与函数 $f(x)$ 的图象没有交点.

如图可知, 由于直线 $y=k(x+3)$ 过点 $(-3,0)$, 当 $k>2$ 时, 直线 $y=k(x+3)$ 是由直线 $y=2(x+3)$ 绕点 $(-3,0)$ 逆时针方向旋转得到. 因此, 在区间 $[-1,5]$ 上, $y=k(x+3)$ 的图象位于函数 $f(x)$ 图象的上方.

22. [解] (1) $a_{10}=10$. $a_{20}=10+10d=40$, $\therefore d=3$.

(2) $a_{30}=a_{20}+10d^2$

$=10(1+d+d^2)$ $(d\neq 0)$,

$$a_{30}=10\left[\left(d+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right],$$

当 $d\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 时,

$$a_{30}\in\left[\frac{15}{2},+\infty\right).$$

(3) 所给数列可推广为无穷数列 $\{a_n\}$, 其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 是首项为1, 公差为1的等差数列, 当 $n\geqslant 1$ 时, 数列 $a_{10n},a_{10n+1},\cdots,a_{10(n+1)}$ 是公差为 d^n 的等差数列.

研究的问题可以是: 试写出 $a_{10(n+1)}$ 关于 d 的关系式, 并求 $a_{10(n+1)}$ 的取值范围.

研究的结论可以是: 由 $a_{40}=a_{30}+10d^3=10(1+d+d^2+d^3)$, 依次类推可得 $a_{10(n+1)}=$

$$10(1+d+\cdots+d^n)=\begin{cases} 10\times\dfrac{1-d^{n+1}}{1-d}, & d\neq 1, \\ 10(n+1), & d=1. \end{cases}$$

当 $d>0$ 时, $a_{10(n+1)}$ 的取值范围为 $(10,+\infty)$ 等.