2007年上海市普通高等学校春季招生考试

数 学 试 卷

考生注意：1. 答卷前，考生务必将姓名、高考座位号、校验码等填写清楚.

2. 本试卷共有21道试题，满分150分. 考试时间120分钟.

一、填空题（本大题满分44分）本大题共有11题，只要求直接填写结果，每题填对得4分，否则一律得零分.

1. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{3n(n+1)}=$ ________.

2. 若关于 x 的一元二次实系数方程 $x^2+px+q=0$ 有一个根为 $1+\mathrm{i}$（i 是虚数单位），则 $q=$ ________.

3. 若关于 x 的不等式 $\dfrac{x-a}{x+1}>0$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$，则实数 $a=$ ________.

4. 函数 $y=(\sin x+\cos x)^2$ 的最小正周期为 ________.

5. 设函数 $y=f(x)$ 是奇函数. 若 $f(-2)+f(-1)-3=f(1)+f(2)+3$，则 $f(1)+f(2)=$ ________.

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，若抛物线 $y^2=$

$4x$上的点P到该抛物线的焦点的距离为6, 则点P的横坐标$x=$________.

7. 在平面直角坐标系xOy中, 若曲线$x=\sqrt{4-y^2}$与直线$x=m$有且只有一个公共点, 则实数$m=$________.

8. 若向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$满足$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{2}$, $\left|\overrightarrow{b}\right|=1$, $\overrightarrow{a}\cdot\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=1$, 则向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$的夹角的大小为________.

9. 若x_1、x_2为方程$2^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{x}+1}$的两个实数解, 则$x_1+x_2=$________.

10. 在一次教师联欢会上, 到会的女教师比男教师多12人, 从这些教师中随机挑选一人表演节目. 若选到男教师的概率为$\frac{9}{20}$, 则参加联欢会的教师共有________人.

11. 函数$y=\begin{cases} x^2+1, & x\geqslant 0, \\ \frac{2}{x}, & x<0 \end{cases}$的反函数是________.

二、选择题(本大题满分16分)本大题共有4题, 每题都给出四个结论, 其中有且只有一个结论是正确的, 必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内, 选对得4分, 否则一律得零分.

12. 若集合$A=\{1,m^2\}$, $B=\{2,4\}$, 则“$m=2$”是“$A\cap B=\{4\}$”的

(A) 充分不必要条件.

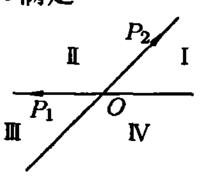
(B) 必要不充分条件.

(C) 充要条件.

(D) 既不充分也不必要条件.

[答]( )

13. 如图, 平面内的两条相交直线OP_1和OP_2将该平面分割成四个部分Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ(不包括边界). 若$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OP_1}+b\overrightarrow{OP_2}$, 且点$P$落在第Ⅲ部分, 则实数$a$、$b$满足



(A) $a>0$, $b>0$. (B) $a>0$, $b<0$.

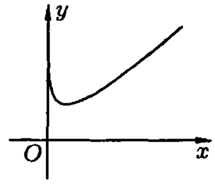
(C) $a<0$, $b>0$. (D) $a<0$, $b<0$.

[答]( )

14. 下列四个函数中, 图象如图所示的只能是

(A) $y=x+\lg x$. (B) $y=x-\lg x$.

(C) $y=-x+\lg x$. (D) $y=-x-\lg x$.



[答]( )

15. 设a、b是正实数, 以下不等式

① $\sqrt{ab}>\frac{2ab}{a+b}$, ② $a>|a-b|-b$, ③ $a^2+b^2>4ab-3b^2$, ④ $ab+\frac{2}{ab}>2$恒成立的序号为

(A) ①、③. (B) ①、④.

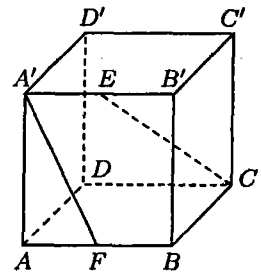
(C) ②、③. (D) ②、④.

[答]( )

三、解答题(本大题满分90分)本大题共有6题, 解答下列各题必须写出必要的步骤.

16. **(本题满分12分)**

如图, 在棱长为2的正方体$ABCD-A'B'C'D'$中, E、F分别是$A'B'$和AB的中点, 求异面直线$A'F$与CE所成角的大小(结果用反三角函数值表示).



17. **(本题满分14分)**

求出一个数学问题的正确结论后, 将其作为条件之一, 提出与原来问题有关的新问题, 我们把它称为原来问题的一个“逆向”问题.

例如, 原来问题是“若正四棱锥底面边长为4, 侧棱长为3, 求该正四棱锥的体积”. 求出体积$\frac{16}{3}$后, 它的一个“逆向”问题可以是“若正四棱锥底面边长为4, 体积为$\frac{16}{3}$, 求侧棱长”; 也可以是“若正四棱锥的体积为$\frac{16}{3}$, 求所有侧面面积之和的最小值”.

试给出问题“在平面直角坐标系xOy中, 求点$P(2,1)$到直线$3x+4y=0$的距离.” 的一个有意义的“逆向”问题, 并解答你所给出的“逆向”问

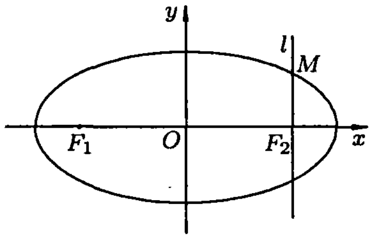
题.

18.(本题满分14分)本题共有2个小题,第1小题满分6分,第2小题满分8分.

如图,在直角坐标系xOy中,设椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的左右两个焦点分别为F_1、F_2.过右焦点F_2且与x轴垂直的直线l与椭圆C相交,其中一个交点为$M(\sqrt{2},1)$.

(1)求椭圆C的方程;

(2)设椭圆C的一个顶点为$B(0,-b)$,直线BF_2交椭圆C于另一点N,求$\triangle F_1BN$的面积.

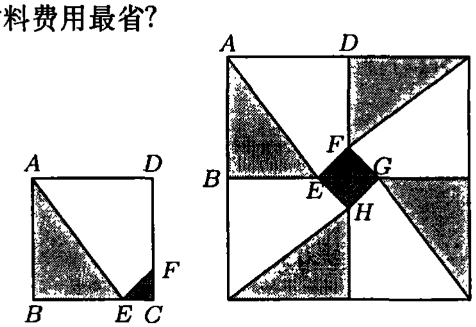


19.(本题满分14分)本题共有2个小题,第1小题满分4分,第2小题满分10分.

某人定制了一批地砖.每块地砖(如图1所示)是边长为0.4米的正方形$ABCD$,点E、F分别在边BC和CD上,$\triangle CFE$、$\triangle ABE$和四边形$AEFD$均由单一材料制成,制成$\triangle CFE$、$\triangle ABE$和四边形$AEFD$的三种材料的每平方米价格之比依次为3:2:1.若将此种地砖按图2所示的形式铺设,能使中间的深色阴影部分成四边形$EFGH$.

(1)求证:四边形$EFGH$是正方形;

(2)E、F在什么位置时,定制这批地砖所需的材料费用最省?



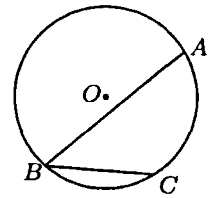
20.(本题满分18分)本题共有3个小题,第1小题满分6分,第2小题满分4分,第3小题满分8分.

通常用a、b、c分别表示$\triangle ABC$的三个内角A、B、C所对边的边长,R表示$\triangle ABC$的外接圆半径.

(1)如图,在以O为圆心,半径为2的$\odot O$中,BC和BA是$\odot O$的弦,其中$BC=2$, $\angle ABC=45°$,求弦AB的长;

(2)在$\triangle ABC$中,若$\angle C$是钝角,求证:$a^2+b^2<4R^2$;

(3)给定三个正实数a、b、R,其中$b\leqslant a$.问:a、b、R满足怎样的关系时,以a、b为边长,R为外接圆半径的$\triangle ABC$不存在、存在一个或存在两个(全等三角形算作同一个)?在$\triangle ABC$存在的情况下,用a、b、R表示c.



21.(本题满分18分)本题共有3个小题,第1小题满分4分,第2小题满分6分,第3小题满分8分.

我们在下面的表格内填写数值:先将第1行的所有空格填上1;再把一个首项为1,公比为q的数列$\{a_n\}$依次填入第一列的空格内;然后按照"任意一格的数是它上面一格的数与它左边一格的数之和"的规则填写其它空格.

	第1列	第2列	第3列	···	第n列
第1行	1	1	1	···	1
第2行	q				
第3行	q^2				
···	···				
第n行	q^{n-1}				

(1)设第2行的数依次为$B_1, B_2, \cdots, B_n$,试用n, q表示$B_1+B_2+\cdots+B_n$的值;

(2)设第3列的数依次为$c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$,求证:对于任意非零实数$q$, $c_1+c_3>2c_2$;

(3)请在以下两个问题中选择一个进行研究(只能选择一个问题,如果都选,被认为选择了第一问).

① 能否找到q的值,使得(2)中的数列$c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$的前$m$项$c_1, c_2, c_3, \cdots, c_m$ $(m\geqslant 3)$成为等比数列?若能找到,m的值有多少个?若不能找到,说明理由.

② 能否找到q的值,使得填完表格后,除第1列外,还有不同的两列数的前三项各自依次成等比数列?并说明理由.

参考答案

一、(第1至11题)

1. $\frac{2}{3}$.　2. 2.　3. 4.　4. π.

5. -3.　6. 5.　7. 2.　8. $\frac{3\pi}{4}$.

9. -1.　10. 120.

11. $y=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x\geqslant 1,\\ \frac{2}{x}. & x<0\end{cases}$

二、(第12至15题)

题号	12	13	14	15
代号	A	B	B	D

三、(第16至21题)

16.[解法一]如图建立空间直角坐标系. 由题意可知

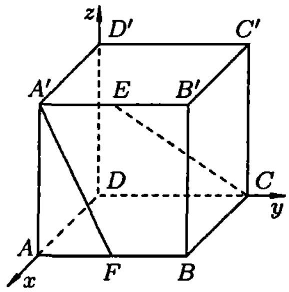
$A'(2,0,2)$、$C(0,2,0)$、$E(2,1,2)$、$F(2,1,0)$.

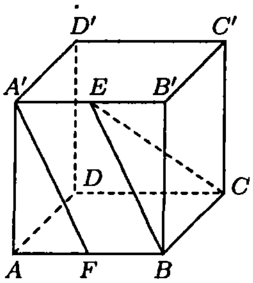
$\therefore\ \overrightarrow{A'F}=(0,1,-2)$, $\overrightarrow{CE}=(2,-1,2)$.

设直线$A'F$与CE所成角为θ, 则

$$\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{A'F}\cdot\overrightarrow{CE}\right|}{\left|\overrightarrow{A'F}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CE}\right|}=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot 3}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$\therefore\ \theta=\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$, 即异面直线$A'F$与$CE$所成角的大小为$\arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$.





[解法二]连结EB, $\because\ A'E/\!/BF$, 且$A'E=BF$, $\therefore\ A'FBE$是平行四边形, 则$A'F/\!/EB$,

$\therefore$ 异面直线$A'F$与CE所成的角就是CE与EB所成的角.

由$CB\perp$平面$ABB'A'$, 得$CB\perp BE$.

在$\mathrm{Rt}\triangle CEB$中, $CB=2$, $BE=\sqrt{5}$, 则$\tan\angle CEB=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\therefore\ \angle CEB=\arctan\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore$ 异面直线$A'F$与CE所成角的大小为$\arctan\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

17.[解] 点(2,1)到直线$3x+4y=0$的距离为$\frac{|3\cdot 2+4\cdot 1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$.

"逆向"问题可以是:

(1)求到直线$3x+4y=0$的距离为2的点的轨迹方程.

[解] 设所求轨迹上任意一点为$P(x,y)$, 则$\frac{|3x+4y|}{5}=2$, 所求轨迹为

$3x+4y-10=0$或$3x+4y+10=0$.

(2)若点$P(2,1)$到直线$l:ax+by=0$的距离为2, 求直线l的方程.

[解] $\frac{|2a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$, 化简得$4ab-3b^2=0$, $b=0$或$4a=3b$,

所以, 直线l的方程为$x=0$或$3x+4y=0$.

意义不大的"逆向"问题可能是:

(3)点$P(2,1)$是不是到直线$3x+4y=0$的距离为2的一个点?

[解] 因为$\frac{|3\cdot 2+4\cdot 1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$,

所以点$P(2,1)$是到直线$3x+4y=0$的距离为2的一个点.

(4)点$Q(1,1)$是不是到直线$3x+4y=0$的距离为2的一个点?

[解] 因为$\frac{|3\cdot 1+4\cdot 1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{7}{5}\neq 2$,

所以点$Q(1,1)$不是到直线$3x+4y=0$的距离为2的一个点.

(5)点$P(2,1)$是不是到直线$5x+12y=0$的距离为2的一个点?

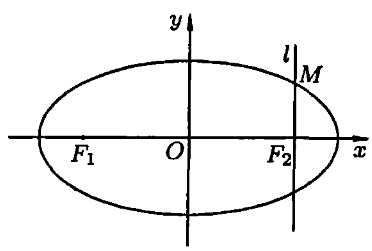
[解] 因为$\frac{|5\cdot 2+12\cdot 1|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{22}{13}\neq 2$,

所以点$P(2,1)$不是到直线$5x+12y=0$的距离为2的一个点.

18.(1)[解法一] $\because\ l\perp x$轴, $\therefore\ F_2$的坐标为$(\sqrt{2},0)$.

由题意可知$\begin{cases}\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\\ a^2-b^2=2,\end{cases}$ 得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=2.\end{cases}$

$\therefore$ 所求椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.



[解法二] 由椭圆定义可知

$|MF_1|+|MF_2|=2a$, 由题意 $|MF_2|=1$, ∴ $|MF_1|=2a-1$.

又由Rt$\triangle MF_1F_2$可知 $(2a-1)^2=(2\sqrt{2})^2+1$, $a>0$, ∴ $a=2$, 又 $a^2-b^2=2$, 得 $b^2=2$.

∴ 椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

[解] (2) 直线BF_2的方程为 $y=x-\sqrt{2}$.

由 $\begin{cases} y=x-\sqrt{2}, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1, \end{cases}$ 得点N的纵坐标为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

又 $|F_1F_2|=2\sqrt{2}$,

∴ $S_{\triangle F_1BN}=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\times 2\sqrt{2}=\frac{8}{3}$.

19. [证明] (1) 图2是由四块图1所示地砖绕点C按顺时针旋转90°后得到, $\triangle CFE$为等腰直角三角形, ∴ 四边形$EFGH$是正方形.

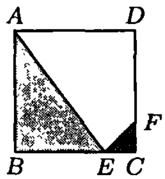


图1

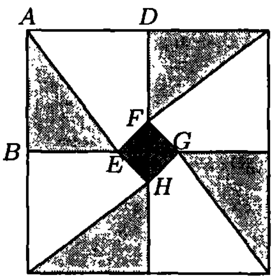


图2

[解] (2) 设$CE=x$, 则$BE=0.4-x$, 每块地砖的费用为W, 制成$\triangle CFE$、$\triangle ABE$和四边形$AEFD$三种材料的每平方米价格依次为$3a$、$2a$、a (元), $W=\frac{1}{2}x^2\cdot 3a+\frac{1}{2}\times 0.4\times(0.4-x)\times 2a+\left[0.16-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\times 0.4\times(0.4-x)\right]a=a(x^2-0.2x+0.24)=a[(x-0.1)^2+0.23]$, $0<x<0.4$.

由$a>0$, 当$x=0.1$时, W有最小值, 即总费用为最省.

答:当$CE=CF=0.1$米时, 总费用最省.

20. [解] (1) $\triangle ABC$的外接圆半径为2, 在$\triangle ABC$中, $AC=2R\sin B=2\sqrt{2}$, $\sin A=\frac{BC}{2R}=\frac{1}{2}$, $A=30^\circ$, $AB^2=BC^2+AC^2-2BC\cdot AC\cdot\cos C=4+8+8\sqrt{2}\cos(A+B)=4(\sqrt{3}+2)=2(\sqrt{3}+1)^2$, ∴ $AB=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

[证明] (2) $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, 由于$\angle C$是钝角, $\angle A$、$\angle B$都是锐角, 得

$\cos A=\frac{1}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}$, $\cos B=\frac{1}{2R}\sqrt{4R^2-b^2}$,

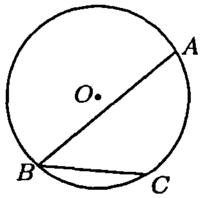
$\cos C=-\cos(A+B)$

$=\frac{1}{4R^2}(ab-\sqrt{4R^2-a^2}\sqrt{4R^2-b^2})<0$,

∵ $a^2b^2<(4R^2-a^2)(4R^2-b^2)$,

∴ $16R^4-4R^2(a^2+b^2)>0$,

即$a^2+b^2<4R^2$.



[解] (3) i) 当$a>2R$或$a=b=2R$时, 所求的$\triangle ABC$不存在.

ii) 当$a=2R$且$b<a$时, $\angle A=90^\circ$, 所求的$\triangle ABC$只存在一个, 且$c=\sqrt{a^2-b^2}$.

iii) 当$a<2R$且$b=a$时, $\angle A=\angle B$, 且A、B都是锐角, 由$\sin A=\frac{a}{2R}=\frac{b}{2R}=\sin B$, A、B唯一确定.

因此, 所求的$\triangle ABC$只存在一个, 且

$c=2a\cdot\cos A=\frac{a}{R}\sqrt{4R^2-a^2}$.

iv) 当$b<a<2R$时, $\angle B$总是锐角, $\angle A$可以是钝角也可以是锐角, 因此, 所求的$\triangle ABC$存在两个. 由$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, 得

当$\angle A<90^\circ$时, $\cos A=\frac{1}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}$,

$c=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(a+B)}$

$=\sqrt{a^2+b^2+\frac{ab}{2R^2}(\sqrt{4R^2-a^2}\sqrt{4R^2-b^2}-ab)}$.

当$\angle A>90^\circ$时, $\cos A=-\frac{1}{2R}\sqrt{4R^2-a^2}$,

$c=\sqrt{a^2+b^2-\frac{ab}{2R^2}(\sqrt{4R^2-a^2}\sqrt{4R^2-b^2}+ab)}$.

21. [解] (1) $B_1=q$, $B_2=1+q$, $B_3=1+(1+q)=2+q$, $\cdots$, $B_n=(n-1)+q$,

所以$B_1+B_2+\cdots+B_n=1+2+\cdots+(n-1)+nq=\frac{n(n-1)}{2}+nq$.

(2) $c_1=1$, $c_2=1+(1+q)=2+q$,

$c_3=(2+q)+(1+q+q^2)=3+2q+q^2$,

由$c_1+c_3-2c_2=1+3+2q+q^2-2(2+q)=q^2>0$, 得$c_1+c_3>2c_2$.

(3) ① 先设c_1, c_2, c_3成等比数列, 由$c_1c_3=c_2^2$, 得$3+2q+q^2=(2+q)^2$, $q=-\frac{1}{2}$.

(下转封底)

(上接第2–41页)

此时$c_1=1$, $c_2=\frac{3}{2}$, $c_3=\frac{9}{4}$,

所以c_1, c_2, c_3是一个公比为$\frac{3}{2}$的等比数列.

如果$m\geqslant 4$, c_1, c_2, $\cdots$, c_m为等比数列, 那么c_1, c_2, c_3一定是等比数列.

由上所述, 此时$q=-\frac{1}{2}$, $c_1=1$, $c_2=\frac{3}{2}$, $c_3=\frac{9}{4}$, $c_4=\frac{23}{8}$, $\cdots$ 由于$\frac{c_4}{c_3}\neq\frac{3}{2}$, 因此, 对于任意$m\geqslant 4$, c_1, c_2, $\cdots$, c_m一定不是等比数列.

综上所述, 当且仅当$m=3$且$q=-\frac{1}{2}$时, 数列c_1, c_2, $\cdots$, c_m是等比数列.

② 设x_1, x_2, x_3和y_1, y_2, y_3分别是第$k+1$列和第$m+1$列的前三项, $1\leqslant k<m\leqslant n-1$, 则$x_1=1$, $x_2=k+q$, $x_3=(1+2+3+\cdots+k)+kq+q^2=\frac{k(k+1)}{2}+kq+q^2$.

若第$k+1$列的前三项x_1, x_2, x_3是等比数列, 则由$x_1x_3=x_2^2$, 得$\frac{k(k+1)}{2}+kq+q^2=(k+q)^2$, $\frac{k^2-k}{2}+kq=0$, $q=\frac{1-k}{2}$.

同理, 若第$m+1$列的前三项y_1, y_2, y_3是等比数列, 则$q=\frac{1-m}{2}$.

当$k\neq m$时, $\frac{1-k}{2}\neq\frac{1-m}{2}$.

所以, 无论怎样的q, 都不能同时找到两列数(除第1列外), 使它们的前三项都成等比数列.