2008年上海市普通高等学校春季招生考试

数 学 试 卷

考生注意: 1. 答卷前, 考生务必将姓名、高考座位号、校验码等填写清楚.

2. 本试卷共有22道试题, 满分150分. 考试时间120分钟.

一、填空题(本大题满分48分)本大题共有12题, 只要求直接填写结果, 每题填对得4分, 否则一律得零分.

1. 已知集合 $A=\{x|x<-1或2\leqslant x<3\}$, $B=\{x|-2\leqslant x<4\}$, 则 $A\cup B=$________.

2. 计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+1}{3^{n+1}+2^n}=$________.

3. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2+x+6}}{x-1}$ 的定义域是________.

4. 方程 $2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ 在区间 $(0,\pi)$ 内的解是________.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, $a_1=1$. 若 a_1、a_2、a_5 成等比数列, 则 $a_n=$________.

6. 化简: $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)=$________.

7. 已知 P 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 右支上的一点, 双曲线的一条渐近线方程为 $3x-y=0$. 设 F_1、F_2 分别为双曲线的左、右焦点. 若 $|PF_2|=3$, 则 $|PF_1|=$______.

8. 已知一个凸多面体共有9个面, 所有棱长均为1, 其平面展开图如图1所示, 则该凸多面体的体积 $V=$__________.

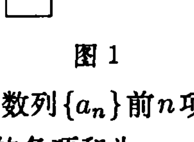

图 1

9. 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n=\dfrac{1}{3}a_n-1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的各项和为__________.

10. 古代"五行"学说认为: "物质分金、木、土、水、火五种属性, 金克木, 木克土, 土克水, 水克火, 火克金." 将五种不同属性的物质任意排成一列, 设事件 A 表示"排列中属性相克的两种物质不相邻", 则事件 A 出现的概率是________(结果用数值表示).

11. 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n$; $b_1, b_2, \cdots, b_n$ (n 是正整数), 令 $L_1=b_1+b_2+\cdots+b_n$, $L_2=b_2+b_3+\cdots+b_n$, $\cdots$, $L_n=b_n$. 某人用图2分析得到恒等式: $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=a_1L_1+c_2L_2+c_3L_3+\cdots+c_kL_k+\cdots+c_nL_n$, 则 $c_k=$__________ $(2\leqslant k\leqslant n)$.

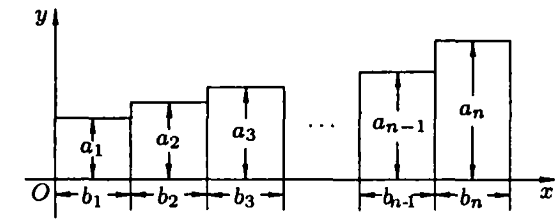

图 2

12. 已知 $A(1,2)$、$b(3,4)$, 直线 $l_1: x=0$, $l_2: y=0$ 和 $l_3: x+3y-1=0$. 设 P_i 是 l_i $(i=1,2,3)$ 上与 A、B 两点距离平方和最小的点, 则 $\triangle P_1P_2P_3$ 的面积是__________.

二、选择题(本大题满分16分)本大题共有4题, 每题都给出四个结论, 其中有且只有一个结论是正确的, 必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内, 选对得4分, 否则一律得零分.

13. 已知向量 $\overrightarrow{a}=(2,-3)$, $\overrightarrow{b}=(3,\lambda)$, 若 $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$, 则 λ 等于 [答]( )

(A) $\dfrac{2}{3}$. (B) -2. (C) $-\dfrac{9}{2}$. (D) $-\dfrac{2}{3}$.

14. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{10-m}+\dfrac{y^2}{m-2}=1$, 长轴在 y 轴上. 若焦距为4, 则 m 等于 [答]( )

(A) 4. (B) 5. (C) 7. (D) 8.

15. 已知函数 $f(x)$、$g(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上, $h(x)=f(x)\cdot g(x)$, 则"$f(x)$、$g(x)$ 均为奇函数"是

"$h(x)$为偶函数"的 [答]( )

(A) 充分不必要条件.

(B) 必要不充分条件.

(C) 充要条件.

(D) 既不充分也不必要条件.

16. 已知$z \in \mathbf{C}$, 且$|z-2-2\mathrm{i}|=1$, i为虚数单位, 则$|z+2-2\mathrm{i}|$的最小值是 [答]( )

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 5.

三、解答题(本大题满分86分)本大题共有6题, 解答下列各题必须写出必要的步骤.

17. **(本题满分12分)**

已知$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 求$\dfrac{2}{\sin 2\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$的值.

18. **(本题满分12分)**

在平面直角坐标系xOy中, A、B分别为直线$x+y=2$与x、y轴的交点, C为AB的中点. 若抛物线$y^2=2px\ (p>0)$过点C, 求焦点F到直线AB的距离.

19. **(本题满分14分)本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.**

已知函数$f(x)=\log_2(2^x+1)$.

(1) 求证: 函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调递增;

(2) 记$f^{-1}(x)$为函数$f(x)$的反函数. 若关于x的方程$f^{-1}(x)=m+f(x)$在$[1,2]$上有解, 求m的取值范围.

20. **(本题满分14分)本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.**

某厂根据市场需求开发折叠式小凳(如图3所示). 凳面为三角形的尼龙布, 凳脚为三根细钢管. 考虑到钢管的受力和人的舒适度等因素, 设计小凳应满足: ① 凳子高度为30cm, ② 三根细钢管相交处的节点O与凳面三角形ABC重心的连线垂直于凳面和地面.

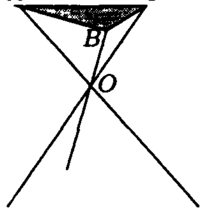

图 3

(1) 若凳面是边长为20cm的正三角形, 三只凳脚与地面所成的角均为45°, 确定节点O分细钢管上下两段的比值(精确到0.01);

(2) 若凳面是顶角为120°的等腰三角形, 腰长为24cm, 节点O分细钢管上下两段之比为2:3. 确定三根细钢管的长度(精确到0.1cm).

21. **(本题满分16分)本题共有3个小题, 第1小题满分3分, 第2小题满分5分, 第3小题满分8分.**

在直角坐标平面xOy上的一列点$A_1(1,a_1)$, $A_2(2,a_2)$, $\cdots$, $A_n(n,a_n)$, $\cdots$, 简记为$\{A_n\}$. 若由$b_n=\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\cdot\overrightarrow{j}$构成的数列$\{b_n\}$满足$b_{n+1}>b_n$, $n=1,2,3,\cdots$, 其中$\overrightarrow{j}$为方向与y轴正方向相同的单位向量, 则称$\{A_n\}$为T点列.

(1) 判断$A_1(1,1)$, $A_2\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$, $A_3\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$, $\cdots$, $A_n\left(n,\dfrac{1}{n}\right)$, $\cdots$, 是否为T点列, 并说明理由;

(2) 若$\{A_n\}$为T点列, 且点A_2在点A_1的右上方. 任取其中连续三点A_k、A_{k+1}、A_{k+2}, 判断$\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2}$的形状(锐角三角形、直角三角形、钝角三角形), 并予以证明;

(3) 若$\{A_n\}$为T点列, 正整数$1\leqslant m<n<p<q$满足$m+q=n+p$, 求证: $\overrightarrow{A_nA_q}\cdot\overrightarrow{j}>\overrightarrow{A_mA_p}\cdot\overrightarrow{j}$.

22. **(本题满分18分)本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分.**

已知z是实系数方程$x^2+2bx+c=0$的虚根, 记它在直角坐标平面上的对应点为$P_z(\mathrm{Re}z,\mathrm{Im}z)$.

(1) 若(b,c)在直线$2x+y=0$上, 求证: P_z在圆$C_1:(x-1)^2+y^2=1$上;

(2) 给定圆$C:(x-m)^2+y^2=r^2$ (m、$r\in\mathbf{R}$, $r>0$), 则存在唯一的线段s满足: ① 若P_z在圆C上, 则(b,c)在线段s上; ② 若(b,c)是线段s上一点(非端点), 则P_z在圆C上. 写出线段s的表达式, 并说明理由;

(3) 由(2)知线段s与C圆之间确定了一种对应关系, 通过这种对应关系的研究, 填写表一(表中s_1是(1)中圆C_1的对应线段).

表一

线段s与线段s_1的关系	m、r的取值或表达式
s所在直线平行于s_1所在直线	
s所在直线平分线段s_1	
线段s与线段s_1长度相等	

参考答案

一、(第1至12题)

1. $\{x|x<4\}$. 2. $\frac{1}{3}$. 3. $[-2,1)\cup(1,3]$.

4. $x=\frac{7\pi}{12}$. 5. $a_n=2n-1$. 6. $\cos\alpha$.

7. 5. 8. $1+\frac{\sqrt{2}}{6}$. 9. -1.

10. $\frac{1}{12}$. 11. a_k-a_{k-1}. 12. $\frac{3}{2}$.

二、(第13至16题)

题号	13	14	15	16
代号	C	D	A	B

三、(第17至22题)

17. [解] 原式$=\frac{2}{2\sin\theta\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

又$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,

$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$,

$\therefore\ \frac{2}{\sin2\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{\sqrt{14}}{2}$.

18. [解] 由已知可得$A(2,0)$. $B(0,2)$、$C(1,1)$, 解得抛物线方程为$y^2=x$.于是焦点$F\left(\frac{1}{4},0\right)$.

$\therefore$ 点F到直线AB的距离为

$$\frac{\left|\frac{1}{4}+0-2\right|}{\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

19. [证明] (1) 任取$x_1<x_2$, 则

$f(x_1)-f(x_2)$

$=\log_2(2^{x_1}+1)-\log_2(2^{x_2}+1)$

$=\log_2\frac{2^{x_1}+1}{2^{x_2}+1}$.

$\because\ x_1<x_2$, $\therefore\ 0<2^{x_1}+1<2^{x_2}+1$,

$\therefore\ 0<\frac{2^{x_1}+1}{2^{x_2}+1}<1$, $\log_2\frac{2^{x_1}+1}{2^{x_2}+1}<0$,

$\therefore\ f(x_1)<f(x_2)$,

即函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调递增.

[解] (2) $\because\ f^{-1}(x)=\log_2(2^x-1)\ (x>0)$,

[解法一] $\therefore\ m=f^{-1}(x)-f(x)$

$=\log_2(2^x-1)-\log_2(2^x+1)$

$=\log_2\frac{2^x-1}{2^x+1}=\log_2\left(1-\frac{2}{2^x+1}\right)$.

当$1\leqslant x\leqslant2$时, $\frac{2}{5}\leqslant\frac{2}{2^x+1}\leqslant\frac{2}{3}$,

$\therefore\ \frac{1}{3}\leqslant1-\frac{2}{2^x+1}\leqslant\frac{3}{5}$,

$\therefore\ m$的取值范围是$\left[\log_2\left(\frac{1}{3}\right),\log_2\left(\frac{3}{5}\right)\right]$.

[解法二] 解方程$\log_2(2^x-1)=m+\log_2(2^x+1)$, 得$x=\log_2\left(\frac{2^m+1}{1-2^m}\right)$.

$\because\ 1\leqslant x\leqslant2$, $\therefore\ 1\leqslant\log_2\left(\frac{2^m+1}{1-2^m}\right)\leqslant2$,

解得$\log_2\left(\frac{1}{3}\right)\leqslant m\leqslant\log_2\left(\frac{3}{5}\right)$.

$\therefore\ m$的取值范围是$\left[\log_2\left(\frac{1}{3}\right),\log_2\left(\frac{3}{5}\right)\right]$.

20. [解] (1) 设$\triangle ABC$的重心为H, 连结OH. 由题意可得, $BH=\frac{20\sqrt{3}}{3}$. 设细钢管上下两段之比为λ. 已知凳子高度为30. 则$OH=\frac{30\lambda}{1+\lambda}$.

$\because$ 节点O与凳面三角形ABC重心的连线与地面垂直, 且凳面与地面平行,

$\therefore\ \angle OBH$就是OB与平面ABC所成的角, 亦即$\angle OBH=45°$.

$\because\ BH=OH$, $\therefore\ \frac{30\lambda}{1+\lambda}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$,

解得, $\lambda=\frac{2\sqrt{3}}{9-2\sqrt{3}}\approx0.63$, 即节点$O$分细钢管上下两段的比值约为0.63.

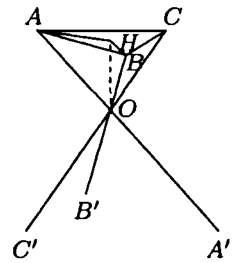

图 4

(2) 设$\angle B=120°$, $\therefore\ AB=BC=24$, $AC=24\sqrt{3}$. 设$\triangle ABC$的重心为H, 则$BH=8$, $AH=8\sqrt{7}$, 由节点O分细钢管上下两段之比为2:3, 可知$OH=12$. 设过点A、B、C的细钢管分别为AA'、BB'、CC', 则$AA'=CC'=\frac{5}{2}OA=\frac{5}{2}\sqrt{OH^2+AH^2}=10\sqrt{37}\approx60.8$,

$BB'=\frac{5}{2}OB=\frac{5}{2}\sqrt{OH^2+BH^2}=10\sqrt{13}\approx36.1$,

$\therefore$ 对应于A、B、C三点的三根细钢管长度分别为60.8cm, 36.1cm和60.8cm.

21. [解] (1) $a_n=\frac{1}{n}$, $\therefore\ b_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{-1}{n(n+1)}$, 显然有$b_{n+1}>b_n$,

$\therefore \{A_n\}$是T点列.

(2) 在$\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2}$中,

$\overrightarrow{A_{k+1}A_k}=(-1, a_k-a_{k+1})$,

$\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}=(1, a_{k+2}-a_{k+1})$,

$\overrightarrow{A_{k+1}A_k}\cdot\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}$

$=-1+(a_{k+2}-a_{k+1})(a_k-a_{k+1})$.

$\because$ 点A_2在点A_1的右上方,

$\therefore b_1=a_2-a_1>0$.

$\because \{A_n\}$为T点列, $\therefore b_n\geqslant b_1>0$,

$\therefore (a_{k+2}-a_{k+1})(a_k-a_{k+1})=-b_{k+1}b_k<0$, 则$\overrightarrow{A_{k+1}A_k}\cdot\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}<0$.

$\therefore \angle A_kA_{k+1}A_{k+2}$为钝角,

$\therefore \triangle A_kA_{k+1}A_{k+2}$为钝角三角形.

(3) [证明] $\because 1\leqslant m<n<p<q$, $m+q=n+p$, $\therefore q-p=n-m>0$. ①

$a_q-a_p=a_q-a_{q-1}+a_{q-1}-a_{q-2}+\cdots+a_{p+1}-a_p=b_{q-1}+b_{q-2}+\cdots+b_p\geqslant(q-p)b_p$. ②

同理 $a_n-a_m=b_{n-1}+b_{n-2}+\cdots+b_m$

$\leqslant(n-m)b_{n-1}$. ③

由于$\{A_n\}$为T点列, 于是$b_p>b_{n-1}$, ④

由①、②、③、④可推得

$a_q-a_p>a_n-a_m$,

$\therefore a_q-a_n>a_p-a_m$,

即$\overrightarrow{A_nA_q}\cdot\overrightarrow{j}>\overrightarrow{A_mA_p}\cdot\overrightarrow{j}$.

22. [证明] (1) 由题意可得$2b+c=0$, 解方程$x^2+2bx-2b=0$, 得$z=-b\pm\sqrt{-2b-b^2}\mathrm{i}$,

$\therefore$ 点$P_z(-b, \sqrt{-2b-b^2})$或

$P_z(-b, -\sqrt{-2b-b^2})$,

将点P_z代入圆C_1的方程, 等号成立,

$\therefore P_z$在圆$C_1: (x-1)^2+y^2=1$上.

(2) [解法一] 当$\Delta<0$, 即$b^2<c$时, 解得

$z=-b\pm\sqrt{c-b^2}\mathrm{i}$,

$\therefore$ 点$P_z(-b, \sqrt{c-b^2})$或$P_z(-b, -\sqrt{c-b^2})$.

由题意可得$(-b-m)^2+c-b^2=r^2$, 整理后得$c=-2mb+r^2-m^2$.

$\because \Delta=4(b^2-c)<0$,

$(b+m)^2+c-b^2=r^2$,

$\therefore b\in(-m-r, -m+r)$. $\therefore$ 线段s为$c=-2mb+r^2-m^2$, $b\in[-m-r, -m+r]$.

若(b, c)是线段s上一点(非端点), 则实系数方程为 $x^2+2bx-2mb+r^2-m^2=0$, $b\in(-m-r, -m+r)$.

此时$\Delta<0$, 且点$P_z(-b, \sqrt{r^2-(b+m)^2})$、$P_z(-b, -\sqrt{r^2-(b+m)^2})$在圆$C$上.

[解法二] 设$z=x+y\mathrm{i}$是原方程的虚根, 则$(x+y\mathrm{i})^2+2b(x+y\mathrm{i})+c=0$,

解得$\begin{cases} x=-b & ① \\ y^2=x^2+2bx+c & ② \end{cases}$

由题意可得, $(x-m)^2+y^2=r^2$. ③

解①、②、③得$c=-2mb+r^2-m^2$.

以下同解法一.

[解] (3) 表一

线段s与线段s_1的关系	m、r的取值或表达式
s所在直线平行于s_1所在直线	$m=1, r\neq1$
s所在直线平分线段s_1	$r^2-(m-1)^2=1, m\neq1$
线段s与线段s_1长度相等	$(1+4m^2)r^2=5$