2009年上海市普通高等学校春季招生考试

数 学 试 卷

考生注意：

1. 答卷前，考生务必在答题纸上将姓名、高考准考证号填写清楚，并在规定的区域内贴上条形码.

2. 本试卷共有20道试题，满分150分. 考试时间120分钟.

一. 填空题（本大题满分60分）本大题共有11题，只要求在答题纸相应题序的空格内直接填写结果，每个空格填对得5分，否则一律得零分.

1．函数 $y=\log_2(x-1)$ 的定义域是________________.

2．计算：$(1-\mathrm{i})^2=$_____________（i为虚数单位）.

3．函数 $y=\cos\dfrac{x}{2}$ 的最小正周期 $T=$__________.

4．若集合 $A=\left\{x\middle|\,|x|>1\right\}$，集合 $B=\left\{x\middle|0<x<2\right\}$，则 $A\cap B=$_____________.

5．抛物线 $y^2=x$ 的准线方程是________________________.

6．已知 $\left|\vec{a}\right|=3,\ \left|\vec{b}\right|=2$. 若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角的大小为_____________.

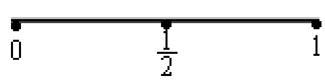
7．过点 $A(4,\ -1)$ 和双曲线 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 右焦点的直线方程为________________________.

8．在△ABC 中，若 $AB=3,\ \ \angle ABC=75^\circ,\ \ \angle ACB=60^\circ$，则 BC 等于____________.

9．已知对于任意实数 x，函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$. 若方程 $f(x)=0$ 有2009个实数解，则这2009个实数解之和为______________.

10．一只猴子随机敲击只有26个小写英文字母的练习键盘. 若每敲1次在屏幕上出现一个字母，它连续敲击10次，屏幕上的10个字母依次排成一行，则出现单词“monkey”的概率为_______________（结果用数值表示）.

11．以下是面点师一个工作环节的数学模型：如图，在数轴上截取与闭区间 $[0,\ 1]$ 对应的线段，对折后（坐标1所对应的点与原点重合）再均匀地拉成1个单位长度的线段，这一过程称为一次操作（例如在第一次操作完成后，原来的坐标 $\dfrac{1}{4}$、$\dfrac{3}{4}$ 变成 $\dfrac{1}{2}$，原来的坐标 $\dfrac{1}{2}$ 变成1，等等）.



那么原闭区间 $[0,\ 1]$ 上（除两个端点外）的点，在第二次操作完成后，恰好被拉到与1重合的点所对应的坐标是___________；原闭区间 $[0,\ 1]$ 上（除两个端点外）的点，在第 n 次操作完成后（$n\geq 1$），恰好被拉到与1重合的点所对应的坐标为______________________.

二．选择题（本大题满分 16 分）本大题共有 4 题，每题都给出四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把答题纸上相应题序内的正确结论代号涂黑，选对得 4 分，否则一律得零分.

12．在空间中，“两条直线没有公共点”是“这两条直线平行”的　　　　　　[答] (　　)

（A）充分不必要条件.　　　　　　　　　　（B）必要不充分条件.

（C）充要条件.　　　　　　　　　　　　　（D）既不充分也不必要条件.

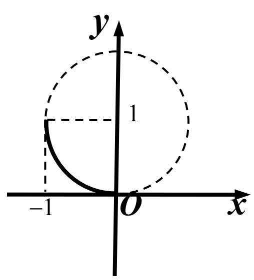
13．过点 $P(0,\ 1)$ 与圆 $x^2+y^2-2x-3=0$ 相交的所有直线中，被圆截得的弦最长时的直线方程是　　　　　　[答] (　　)

（A） $x=0$.　　（B） $y=1$.　　（C） $x+y-1=0$.　（D） $x-y+1=0$.

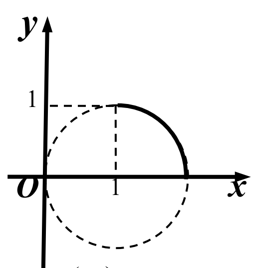
14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^{x+1},\ x\le 0,\\ \log_2 x,\ x>0.\end{cases}$ 若 $f\left(x_0\right)>3$，则 x_0 的取值范围是　　　　[答] (　　)

（A） $x_0>8$.　　（B） $x_0<0$ 或 $x_0>8$.　　（C） $0<x_0<8$.　　（D） $x_0<0$ 或 $0<x_0<8$.

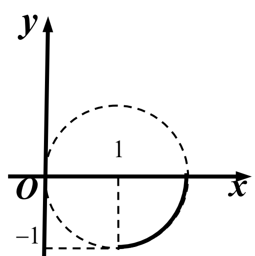
15．函数 $y=1+\sqrt{1-x^2}$ $(-1\le x\le 0)$ 的反函数图像是　　　　　　[答] (　　)



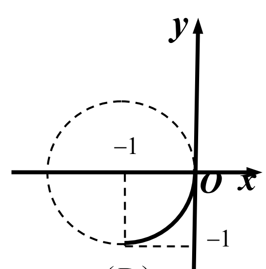
（A）



（B）



（C）

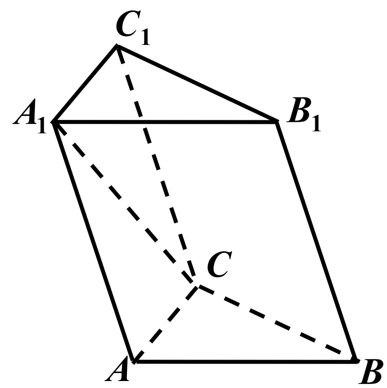


（D）

三．解答题（本大题满分 74 分）本大题共有 5 题，解答下列各题必须在答题纸的规定区域（对应的题号）内写出必要的步骤.

16.（本题满分 12 分）

如图，在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle A_1AC=\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle AA_1C=\dfrac{\pi}{6}$，侧棱 BB_1 与底面所成的角为 $\dfrac{\pi}{3}$，$AA_1=4\sqrt{3}$，$BC=4$．求斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 V．



17.（本题满分 14 分） 本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

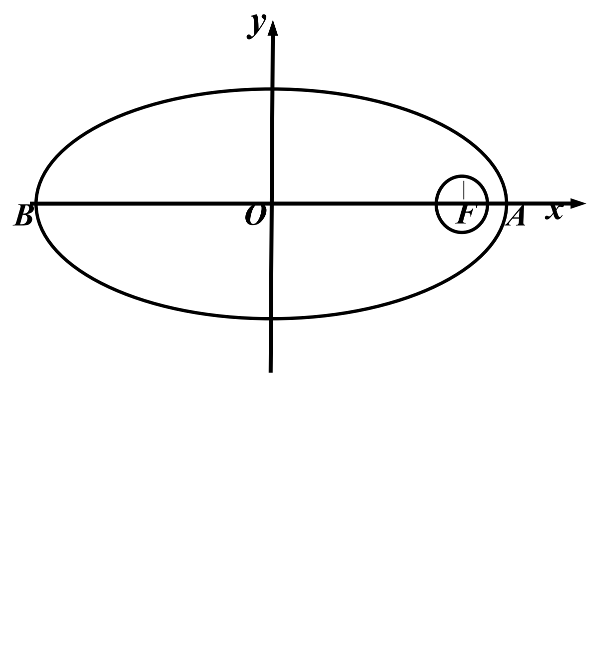
已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，且 $3a_{n+1}+2S_n=3$（n 为正整数）.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）记 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$．若对任意正整数 n，$kS\le S_n$ 恒成立，求实数 k 的最大值.

18.（本题满分 14 分）

我国计划发射火星探测器，该探测器的运行轨道是以火星（其半径 $R=34$ 百公里）的中心 F 为一个焦点的椭圆. 如图，已知探测器的近火星点（轨道上离火星表面最近的点）A 到火星表面的距离为 8 百公里，远火星点（轨道上离火星表面最远的点）B 到火星表面的距离为 800 百公里. 假定探测器由近火星点 A 第一次逆时针运行到与轨道中心 O 的距离为 $\sqrt{ab}$ 百公里时进行变轨，其中 a、b 分别为椭圆的长半轴、短半轴的长，求此时探测器与火星表面的距离（精确到 1 百公里）.



19.（本题满分 16 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 5 分，第 3 小题满分 7 分.

如图，在直角坐标系 xOy 中，有一组对角线长为 a_n 的正方形 $A_nB_nC_nD_n$ （$n=1,2,\cdots$），其对角线 B_nD_n 依次放置在 x 轴上（相邻顶点重合）．设 $\{a_n\}$ 是首项为 a，公差为 $d(d>0)$ 的等差数列，点 B_1 的坐标为 $(d,\ 0)$.

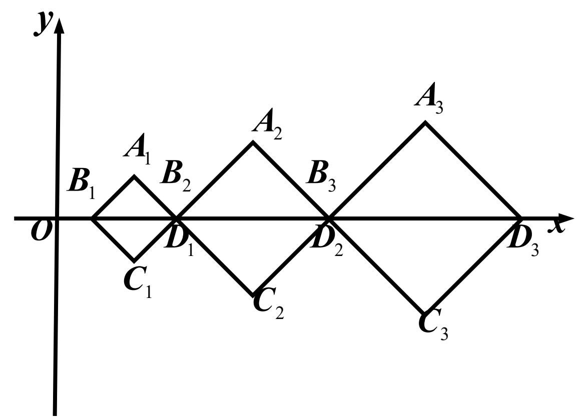
（1）当 $a=8,\quad d=4$ 时，

证明：顶点 A_1、A_2、A_3 不在同一条直线上；

（2）在（1）的条件下，

证明：所有顶点 A_n 均落在抛物线 $y^2=2x$ 上；

（3）为使所有顶点 A_n 均落在抛物线 $y^2=2px\quad(p>0)$ 上，求 a 与 d 之间所应满足的关系式.



20.（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 4 分，第 3 小题满分 10 分.

设函数 $f_n(\theta)=\sin^n\theta+(-1)^n\cos^n\theta,\quad 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}$，其中 n 为正整数.

（1）判断函数 $f_1(\theta)$、 $f_3(\theta)$ 的单调性，并就 $f_1(\theta)$ 的情形证明你的结论；

（2）证明：$2f_6(\theta)-f_4(\theta)=\left(\cos^4\theta-\sin^4\theta\right)\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)$；

（3）对于任意给定的正整数 n，求函数 $f_n(\theta)$ 的最大值和最小值.

2009 年上海市普通高等学校春季招生考试

数 学 试 卷

参考答案及评分标准

说明

1. 本解答列出试题的一种或几种解法，如果考生的解法与所列解法不同,可参照解答中评分标准的精神进行评分.

2. 评阅试卷，应坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅. 当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半，如果有较严重的概念性错误，就不给分.

3. 第 **16** 题至第 **20** 题中右端所注的分数，表示考生正确做到这一步应得的该题累加分数.

4. 给分或扣分均以 **1** 分为单位.

答案及评分标准

一.（第 1 至 11 题）每一个空格正确的给 5 分，否则一律得零分.

1. $(1,\ +\infty)$.　　2. $-2\mathrm{i}$.　　3. 4π.　　4. $\{x\,|\,1<x<2\}$.　　5. $x=-\dfrac{1}{4}$.

6. $\dfrac{2}{3}\pi$.　　7. $y=x-5$.　　8. $\sqrt{6}$.　　9. 0.　　10. $\dfrac{5}{26^6}$.

11. $\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}$；$\dfrac{j}{2^n}$，$j$ 为 $[1,\ 2^n]$ 中的所有奇数.

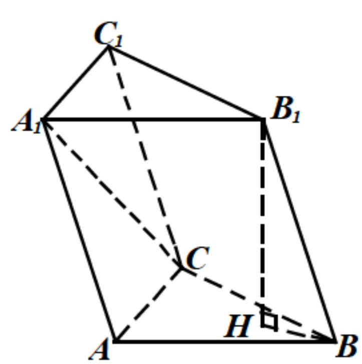
二.（第 12 至 15 题）每一题正确的给 4 分，否则一律得零分.

题　号	12	13	14	15
代　号	B	C	A	C

三.（第 16 至 20 题）

16. [解] 在 Rt△AA_1C 中，$AC=AA_1\cdot\tan\angle AA_1C$

$=4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=4$.　　…… 3 分



作 $B_1H\perp$ 平面 ABC，垂足为 H，则 $\angle B_1BH=\dfrac{\pi}{3}$，

…… 6 分

在 Rt△B_1BH 中，$B_1H=BB_1\cdot\sin\angle B_1BH$

$=AA_1\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=4\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6$.　　…… 9 分

$\therefore\quad V=S_{\Delta ABC}\cdot B_1H=\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\times 6=48$.　　…… 12 分

17. [解]（1）$\because\ 3a_{n+1}+2S_n=3$，　　①

$\therefore$ 当 $n\ge 2$ 时，$3a_n+2S_{n-1}=3$.　　②

由 ① – ②，得 $3a_{n+1}-3a_n+2a_n=0$.

$\therefore\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{3}\quad (n\ge 2)$.　　…… 3 分

又 $\because\ a_1=1$，$3a_2+2a_1=3$，解得 $a_2=\dfrac{1}{3}$.　　…… 4 分

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 $q=\dfrac{1}{3}$ 的等比数列.

$\therefore\quad a_n=a_1q^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$（$n$ 为正整数）.　　…… 6 分

（2）由（1）知，$S=\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$，　　…… 8 分

$$S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right].$$　　…… 10 分

由题意可知，对于任意的正整数 n，恒有 $\dfrac{3}{2}k\le\dfrac{3}{2}\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]$，解得 $k\le 1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

$\because$ 数列 $\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$ 单调递增，$\therefore$ 当 $n=1$ 时，数列中的最小项为 $\dfrac{2}{3}$，

$\therefore$ 必有 $k\le\dfrac{2}{3}$，即实数 k 的最大值为 $\dfrac{2}{3}$.　　…… 14 分

18. [解] 设所求轨道方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，$c=\sqrt{a^2-b^2}$.

$\because\ a+c=800+34,\quad a-c=8+34$，$\therefore\ a=438,\quad c=396$.　　…… 4 分

于是 $b^2=a^2-c^2=35028$.

$\therefore$ 所求轨道方程为 $\dfrac{x^2}{191844}+\dfrac{y^2}{35028}=1$.　　…… 6 分

设变轨时，探测器位于 $P(x_0,\ y_0)$，则

$x_0^2+y_0^2=ab=81975.1$，$\dfrac{x_0^2}{191844}+\dfrac{y_0^2}{35028}=1$，

解得 $x_0=239.7$，$y_0=156.7$（由题意）. …… 10 分

$\therefore$ 探测器在变轨时与火星表面的距离为

$\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}-R\approx 187.3$. …… 13 分

答：探测器在变轨时与火星表面的距离约为 187 百公里. …… 14 分

19. [证明]（1）由题意可知，$A_1(8,\ 4)$，$A_2(18,\ 6)$，$A_3(32,\ 8)$，

$\therefore\ k_{A_1A_2}=\dfrac{6-4}{18-8}=\dfrac{1}{5}$，$k_{A_2A_3}=\dfrac{8-6}{32-18}=\dfrac{1}{7}$. …… 3 分

$\because\ k_{A_1A_2}\neq k_{A_2A_3}$，

$\therefore$ 顶点 A_1,A_2,A_3 不在同一条直线上. …… 4 分

（2）由题意可知，顶点 A_n 的横坐标 $x_n=d+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+\dfrac{1}{2}a_n=2(n+1)^2$，

顶点 A_n 的纵坐标 $y_n=\dfrac{1}{2}a_n=2(n+1)$. …… 7 分

$\because$ 对任意正整数 n，点 $A_n(x_n,\ y_n)$ 的坐标满足方程 $y^2=2x$，

$\therefore$ 所有顶点 A_n 均落在抛物线 $y^2=2x$ 上. …… 9 分

（3）[解法一] 由题意可知，顶点 A_n 的横、纵坐标分别是

$x_n=d+\dfrac{1}{2}a+(n-1)a+\dfrac{1}{2}(n-1)^2d$，$y_n=\dfrac{1}{2}[a+(n-1)d]$

消去 $n-1$，可得 $x_n=\dfrac{2}{d}y_n^2+d+\dfrac{a(d-a)}{2d}$. …… 12 分

为使得所有顶点 A_n 均落在抛物线 $y^2=2px\ \ (p>0)$ 上，则有

$\begin{cases}\dfrac{d}{2}=2p,\\ d+\dfrac{a(d-a)}{2d}=0.\end{cases}$ 解之，得 $d=4p$，$a=8p$. …… 14 分

$\therefore$ a、d 所应满足的关系式是：$a=2d$. …… 16 分

[解法二] 点 $A_1(x_1,\ y_1)$ 的坐标为 $\begin{cases}x_1=d+\dfrac{1}{2}a,\\ y_1=\dfrac{1}{2}a.\end{cases}$

$\because$ 点 $A_1(x_1,\ y_1)$ 在抛物线 $y^2=2px$ 上，

$\therefore\ p=\dfrac{y_1^2}{2x_1}=\dfrac{a^2}{4(2d+a)}$. …… 11 分

又点 $A_2(x_2, y_2)$ 的坐标为 $\begin{cases} x_2 = \dfrac{3}{2}a + \dfrac{3}{2}d, \\ y_2 = \dfrac{1}{2}(a+d). \end{cases}$ 且点 $A_2(x_2, y_2)$ 也在抛物线上，

$\because$ $a>0,\ d>0$，把点 $A_2(x_2, y_2)$ 代入抛物线方程，解得 $a=2d$. …… 13 分

因此，$p=\dfrac{d}{4}$，$\therefore$ 抛物线方程为 $y^2=\dfrac{d}{2}x$.

又 $\begin{cases} x_n = d+\dfrac{1}{2}a+(n-1)a+\dfrac{1}{2}(n-1)^2 d = \dfrac{(n+1)^2}{2}d, \\ y_n = \dfrac{1}{2}[a+(n-1)d] = \dfrac{n+1}{2}d. \end{cases}$

$\therefore$ 所有顶点 $A_n(x_n, y_n)$ 落在抛物线 $y^2=\dfrac{d}{2}x$ 上. …… 15 分

$\therefore$ a、d 所应满足的关系式是：$a=2d$. …… 16 分

20. [解] （1） $f_1(\theta)$、$f_3(\theta)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ 上均为单调递增的函数. …… 2 分

对于函数 $f_1(\theta)=\sin\theta-\cos\theta$ ，设 $\theta_1<\theta_2$，θ_1、$\theta_2 \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$，则

$f_1(\theta_1)-f_1(\theta_2)=(\sin\theta_1-\sin\theta_2)+(\cos\theta_2-\cos\theta_1)$，

$\because$ $\sin\theta_1<\sin\theta_2$，$\cos\theta_2<\cos\theta_1$，

$\therefore$ $f_1(\theta_1)<f_1(\theta_2)$，$\therefore$ 函数 $f_1(\theta)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增. …… 4 分

（2）$\because$ 原式左边

$=2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta+\cos^4\theta)-(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$

$=1-\sin^2 2\theta=\cos^2 2\theta$. …… 6 分

又$\because$ 原式右边 $=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2=\cos^2 2\theta$.

$\therefore$ $2f_6(\theta)-f_4(\theta)=(\cos^4\theta-\sin^4\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$. …… 8 分

（3）当 $n=1$ 时，函数 $f_1(\theta)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，

$\therefore$ $f_1(\theta)$ 的最大值为 $f_1\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，最小值为 $f_1(0)=-1$.

当 $n=2$ 时，$f_2(\theta)=1$，$\therefore$ 函数 $f_2(\theta)$ 的最大、最小值均为 1.

当 $n=3$ 时，函数 $f_3(\theta)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ 上为单调递增.

$\therefore\ f_3(\theta)$ 的最大值为 $f_3\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，最小值为 $f_3(0)=-1$.

当 $n=4$ 时，函数 $f_4(\theta)=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2\theta$ 在 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减，

$\therefore\ f_4(\theta)$ 的最大值为 $f_4(0)=1$，最小值为 $f_4\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$. …… 11 分

下面讨论正整数 $n\geq 5$ 的情形：

当 n 为奇数时，对任意 θ_1、$\theta_2\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ 且 $\theta_1<\theta_2$，

$\because\ f_n(\theta_1)-f_n(\theta_2)=\left(\sin^n\theta_1-\sin^n\theta_2\right)+\left(\cos^n\theta_2-\cos^n\theta_1\right)$，

以及 $0\leq\sin\theta_1<\sin\theta_2<1,\quad 0<\cos\theta_2<\cos\theta_1\leq 1$，

$\therefore\ \sin^n\theta_1<\sin^n\theta_2,\quad \cos^n\theta_2<\cos^n\theta_1$，从而 $f_n(\theta_1)<f_n(\theta_2)$.

$\therefore\ f_n(\theta)$ 在 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{4}\right]$ 上为单调递增，则

$f_n(\theta)$ 的最大值为 $f_n\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，最小值为 $f_4(0)=-1$. …… 14 分

当 n 为偶数时，一方面有 $f_n(\theta)=\sin^n\theta+\cos^n\theta\leq\sin^2\theta+\cos^2\theta=1=f_n(0)$.

另一方面，由于对任意正整数 $l\geq 2$，有

$2f_{2l}(\theta)-f_{2l-2}(\theta)=\left(\cos^{2l-2}\theta-\sin^{2l-2}\theta\right)\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\geq 0$，

$\therefore\ f_n(\theta)\geq\dfrac{1}{2}f_{n-2}(\theta)\geq\cdots\geq\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}}f_2(\theta)=\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}}=f_n\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$\therefore$ 函数 $f_n(\theta)$ 的最大值为 $f_n(0)=1$，最小值为 $f_n\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

综上所述，当 n 为奇数时，函数 $f_n(\theta)$ 的最大值为 0，最小值为 -1.

当 n 为偶数时，函数 $f_n(\theta)$ 的最大值为 1，最小值为 $2\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$. …… 18 分