2010年上海市普通高等学校春季招生考试

数学试卷

考生注意：1.答卷前，考生务必在答题纸上将姓名、高考准考证号写清楚，并在规定的区域内贴上条形码.

2.本试卷共有23道试题，满分150分. 考试时间120分钟.

一、填空题(本大题满分56分)本大题共有14题，考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分.

1.函数$y=\frac{1}{2}\sin 2x$的最小正周期$T=$______.

2.已知函数$f(x)=ax^2+2x$是奇函数，则实数$a=$________.

3.计算: $\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=$________(i为虚数单位).

4.已知集合$A=\{x\,|\,|x|<2\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{x+1}>0\right\}$, 则$A\cap B=$________.

5.若椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$上一点$P$到焦点$F_1$的距离为6，则点$P$到另一个焦点$F_2$的距离是________.

6.某社区对居民进行上海世博会知晓情况的分层抽样调查. 已知该社区有青年人、中年人和老年人分别有800人、1600人、1400人. 若在老年人中的抽样人数是70，则在中年人中的抽样人数应该是________.

7.已知双曲线C经过点(1, 1)，它的一条渐近线方程为$y=\sqrt{3}x$，则双曲线C的标准方程是________.

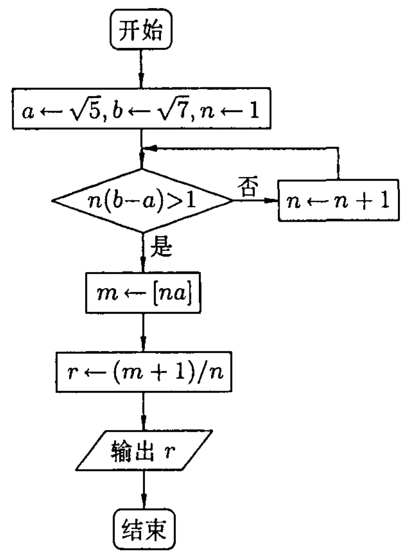
8.在$\left(2x^2+\frac{1}{x}\right)^6$的二项展开式中，常数项是________.

9.连续掷两次骰子，出现点数之和等于4的概率为________(结果用数值表示).

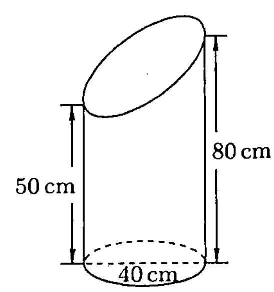
10.各棱长都为1的正四棱锥的体积$V=$________.

11.方程$\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & x & x^2\\ 1 & -3 & 9\end{vmatrix}=0$的解集为______.

12.根据所示的程序框图(其中$[x]$表示不大于x的最大整数)，输出$r=$________.



13.在下图所示的斜截圆柱中，已知圆柱底面的直径为40cm，母线长最短50cm、最长80cm，则斜截圆柱侧面面积$S=$______cm^2.



14.设n阶方阵$A_n=$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1\\ 2n+1 & 2n+3 & 2n+5 & \cdots & 4n-1\\ 4n+1 & 4n+3 & 4n+5 & \cdots & 6n-1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 2n(n-1)+1 & 2n(n-1)+3 & 2n(n-1)+5 & \cdots & 2n^2-1\end{pmatrix}.$$

任取A_n中的一个元素，记为x_1；划去x_1所在的行和列，将剩下的元素按原来的位置关系组成

$n-1$阶方阵A_{n-1}, 任取A_{n-1}中的一个元素, 记为x_2; 划去x_2所在的行和列, ……; 将最后剩下的一个元素记为x_n. 记$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n^3+1}=$______.

二、选择题(本大题满分20分)本大题共有4题, 每题有且只有一个正确答案. 考生应在答题纸上的相应编号上, 将代表答案的小方格涂黑, 选对得5分, 否则一律得零分.

15.若空间三条直线a、b、c满足$a\perp b$, $b\perp c$, 则直线a与c [答]( )

(A) 一定平行. (B) 一定相交.

(C) 一定是异面直线.

(D) 平行、相交、是异面直线都有可能.

16.已知a_1、$a_2\in(0,1)$. 记$M=a_1a_2$, $N=a_1+a_2-1$, 则M与N的大小关系是 [答]( )

(A) $M<N$. (B) $M>N$.

(C) $M=N$. (D) 不确定.

17.已知抛物线$C: y^2=x$与直线$l: y=kx+1$. "$k\neq 0$"是"直线l与抛物线C有两个不同的交点"的 [答]( )

(A) 充分不必要条件. (B) 必要不充分条件.

(C) 充要条件.

(D) 既不充分也不必要条件.

18.已知函数$f(x)=\dfrac{1}{4-2^x}$的图像关于点P对称, 则点P的坐标是 [答]( )

(A) $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$. (B) $\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$.

(C) $\left(2,\dfrac{1}{8}\right)$. (D) $(0,0)$.

三、解答题(本大题满分74分)本大题共有5题, 解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

19.**(本题满分12分)**

已知$\tan\theta=a\,(a>1)$, 求$\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}\cdot\tan 2\theta$的值.

20.**(本题满分14分)本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.**

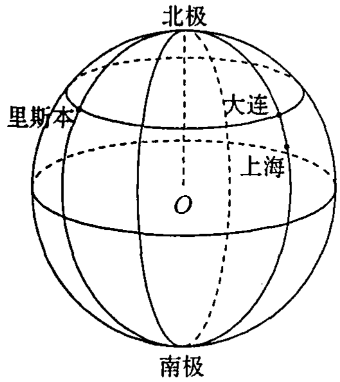
已知函数$f(x)=\log_a(8-2^x)\,(a>0$, 且$a\neq 1)$.

(1)若函数$f(x)$的反函数是其本身, 求a的值;

(2)当$a>1$时, 求函数$y=f(x)+f(-x)$的最大值.

21.**(本题满分14分)本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.**

已知地球的半径约为6371千米. 上海的位置约为东经121°、北纬31°, 大连的位置为东经121°、北纬39°, 里斯本的位置约为西经10°、北纬39°.



(1)若飞机以平均速度720千米/小时飞行, 则从上海到大连的最短飞行时间约为多少小时(飞机飞行高度忽略不计. 结果精确到0.1小时)?

(2)求大连与里斯本之间的球面距离(结果精确到1千米).

22.**(本题满分16分)本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分.**

在平面上, 给定非零向量$\overrightarrow{b}$. 对任意向量$\overrightarrow{a}$, 定义$\overrightarrow{a'}=\overrightarrow{a}-\dfrac{2\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)}{\left|\overrightarrow{b}\right|^2}\overrightarrow{b}$.

(1)若$\overrightarrow{a}=(2,3)$, $\overrightarrow{b}=(-1,3)$, 求$\overrightarrow{a'}$;

(2)若$\overrightarrow{b}=(2,1)$, 证明: 若位置向量$\overrightarrow{a}$的终点在直线$Ax+By+C=0$上, 则位置向量$\overrightarrow{a'}$的终点也在一条直线上;

(3)已知存在单位向量$\overrightarrow{b}$, 当位置向量$\overrightarrow{a}$的终点在抛物线$C: x^2=y$上时, 位置向量$\overrightarrow{a'}$的终点总在抛物线$C': y^2=x$上. 曲线C与C'关于直线l对称, 问直线l与向量$\overrightarrow{b}$满足什么关系?

23.**(本题满分18分)本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分8分.**

已知首项为x_1的数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=$

$\dfrac{ax_n}{x_n+1}$(a为常数).

(1)若对任意的$x_1\neq -1$, 有$x_{n+2}=x_n$对任意的$n\in \mathbf{N}^*$都成立, 求a的值;

(2)当$a=1$时, 若$x_1>0$, 数列$\{x_n\}$是递增数列还是递减数列? 请说明理由;

(3)当a确定后, 数列$\{x_n\}$由其首项x_1确定. 当$a=2$时, 通过对数列$\{x_n\}$的探究, 写出“$\{x_n\}$是有穷数列”的一个真命题(不必证明).

说明: 对于第(3)题, 将根据写出真命题所体现的思维层次和对问题探究的完整性, 给予不同的评分.

参考答案

一、(第1至14题)

1. π.　2. 0.　3. $1+\mathrm{i}$.

4. $\{x|-1<x<2\}$.　5. 4.　6. 80.

7. $\dfrac{x^2}{2/3}-\dfrac{y^2}{2}=1$.　8. 60.　9. $\dfrac{1}{12}$.

10. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.　11. $\{-3,2\}$.　12. $\dfrac{7}{3}$.

13. 2600π.　14. 1.

二、(第15至18题)

题号	15	16	17	18
代号	D	B	B	C

三、(第19至23题)

19. [解]

$$原式=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\tan\theta)\cdot\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{\sqrt{2}a}{1-a}.$$

20. [解] (1)函数$f(x)$的反函数$f^{-1}(x)=\log_2(8-a^x)$, 由题意可得

$\log_a(8-2^x)=\log_2(8-a^x)$,

$\therefore a=2$.

(2)由题意可知$8-2^x>0$, 解得$x<3$, 则$y=f(x)+f(-x)$的定义域为$(-3,3)$.

$f(x)+f(-x)$

$=\log_a(8-2^x)+\log_a(8-2^{-x})$

$=\log_a[65-8(2^x+2^{-x})]$.

$\because 2^x+2^{-x}\geqslant 2$, 当$x=0$时, 等号成立,

$\therefore 0<65-8(2^x+2^{-x})\leqslant 49$.

当$a>1$时, 函数$y=f(x)+f(-x)$在$x=0$处取得最大值$\log_a 49$.

21. [解] (1) $\because$ 上海与大连在同一经线上,

$\therefore$ 它们在地球的同一个大圆上.

设地球的球心为O, 上海、大连分别为点A、B. 由上海、大连的经、纬度知$\angle AOB=8^\circ$.

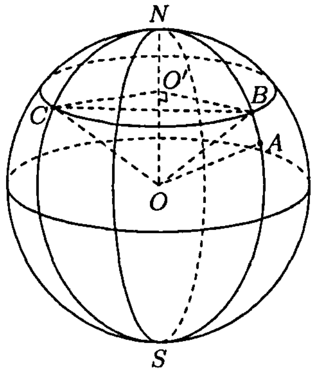
又地球半径$r\approx 6371$(千米),

经计算的AB的弧长为

$6371\times\pi\dfrac{8^\circ}{180^\circ}\approx 889.56$(千米).

$889.56\div 720\approx 1.2$(小时).

$\therefore$ 从上海到大连的最短飞行时间约为1.2小时.



(2)设里斯本为点C, 过B作与赤道平面平行的球的截面, 设其圆心为O'. 由已知得

$\angle BO'C=121^\circ+10^\circ=131^\circ$, $\angle OBO'=39^\circ$.

$OB=OC=r$,

$O'C=O'B=OB\cos\angle OBO'=r\cos 39^\circ$.

由余弦定理可得

$BC^2=O'B^2+O'C^2-2\cdot O'B\cdot O'C\cdot\cos 131^\circ$
$=2r^2\cos^2 39^\circ(1-\cos 131^\circ)$.

$$\cos\angle BOC=\frac{OB^2+OC^2-BC^2}{2\cdot OB\cdot OC}$$

$$=\frac{2r^2-2r^2\cos^2 39^\circ(1-\cos 131^\circ)}{2r^2}$$

$=1-\cos^2 39^\circ(1-\cos 131^\circ)$

$\approx -1.87\times 10^{-4}$,

$\therefore \angle BOC\approx 90.01^\circ$.

于是大圆的圆弧BC长为

$6371\times\pi\times\dfrac{90.01^\circ}{180^\circ}\approx 10009$(千米).

$\therefore$ 大连与里斯本之间的球面距离约为10009千米.

22. [解] (1) $\overrightarrow{a'}=(2,3)-\dfrac{2\times(-2+9)}{10}(-1,3)$
$=\left(\dfrac{17}{5},-\dfrac{6}{5}\right)$.

(2)设$\overrightarrow{a}=(x,y)$, $\overrightarrow{a'}=(x',y')$, 则

$$(x',y')=(x,y)-\frac{2}{5}(2x+y)(2,1)$$
$$=\left(-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y,-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y\right),$$
$$\therefore\ \begin{cases}x'=-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y,\\ y'=-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y,\end{cases}$$
于是$\begin{cases}x=-\frac{3}{5}x'-\frac{4}{5}y',\\ y=-\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}y'.\end{cases}$

故$A\left(-\frac{3}{5}x'-\frac{4}{5}y'\right)+B\left(-\frac{4}{5}x'+\frac{3}{5}y'\right)+C=0$,

从而$-\frac{1}{5}(3A+4B)x'+\frac{1}{5}(-4A+3B)y'+C=0$,

由于A、B不全为零, 所以$3A+4B$, $-4A+3B$也不全为零.

于是$\overrightarrow{a'}$的终点在直线$-\frac{1}{5}(3A+4B)x+\frac{1}{5}(-4A+3B)y+C=0$上.

(3) 设$\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$, 则$b_1^2+b_2^2=1$. 对任意实数$t$, 取$\overrightarrow{a}=(t,t^2)$, 则

$$\overrightarrow{a'}=(t,t^2)-(2(t,t^2)\cdot(b_1,b_2))(b_1,b_2)$$
$$=(t,t^2)-(2tb_1+2t^2b_2)(b_1,b_2)$$
$$=((1-2b_1^2)t-2b_1b_2t^2,-2b_1b_2t+(1-2b_2^2)t^2).$$

$\because$ $\overrightarrow{a'}$的终点在曲线C'上,

$\therefore$ $(-2b_1b_2t+(1-2b_2^2)t^2)^2=(1-2b_1^2)t-2b_1b_2t^2$. ①

由于t为任意实数, 比较 ① 式两边t的系数得 $1-2b_2^2=0$, $(-2b_1b_2)^2=-2b_1b_2$, $1-2b_1^2=0$.

从而$b_1^2=b_2^2=\frac{1}{2}$, $b_1b_2<0$,

$\therefore$ $\overrightarrow{b}=\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

对曲线C中任意点(x_0,y_0), 可知(y_0,x_0)落在曲线C'上, 反之亦然. 故曲线$C: x^2=y$与曲线$C': y^2=x$关于直线$l: y=x$对称.

l的方向向量$\overrightarrow{d}=(1,1)$, $\because$ $\overrightarrow{d}\cdot\overrightarrow{b}=0$, $\therefore$ $\overrightarrow{d}\perp\overrightarrow{b}$, 即直线$l$与向量$\overrightarrow{b}$垂直.

23. [解] (1) $\because$ $x_{n+2}=\dfrac{ax_{n+1}}{x_{n+1}+1}$

$$=\frac{a\cdot\frac{ax_n}{x_n+1}}{\frac{ax_n}{x_n+1}+1}=\frac{a^2x_n}{ax_n+x_n+1}=x_n,$$

$\therefore$ $a^2x_n=(a+1)x_n^2+x_n$.

当$n=1$时, 由x_1的任意性,

得$\begin{cases}a^2=1,\\ a+1=0,\end{cases}$

$\therefore$ $a=-1$.

(2) 数列$\{x_n\}$是递减数列.

$\because$ $x_1>0$, $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{x_n+1}$,

$\therefore$ $x_n>0$, $n\in\mathbf{N}^*$.

又$x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n}{x_n+1}-x_n=-\dfrac{x_n^2}{x_n+1}<0$, $n\in\mathbf{N}^*$,

故数列$\{x_n\}$是递减数列.

(3) 真命题:

(i) 数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=\dfrac{2x_n}{x_n+1}$, 若$x_1=-\dfrac{1}{7}$, 则$\{x_n\}$是有穷数列.

(写出x_1取某些特殊值时, $\{x_n\}$是有穷数列的真命题, 均得2分)

(ii) 数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=\dfrac{2x_n}{x_n+1}$, 若$x_1=\dfrac{1}{1-2^m}$, $m\in\mathbf{N}^*$ 则$\{x_n\}$是有穷数列.

(与出x_1的一般表达式, 但仅是充分性或必要性的真命题, 均得4分)

(iii) 数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=\dfrac{2x_n}{x_n+1}$, 则$\{x_n\}$是有穷数列的充要条件是存在$m\in\mathbf{N}^*$, 使得$x_1=\dfrac{1}{1-2^m}$.

(写出x_1的一般表达式, 并提出充分必要性的真命题, 均得6分)

(iv) 数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=\dfrac{2x_n}{x_n+1}$, 则$\{x_n\}$是有穷数列且项数为$m$的充要条件是

$x_1=\dfrac{1}{1-2^m}$, $m\in\mathbf{N}^*$.

(写出x_1的一般表达式, 提出充分性必要性, 且说明有穷数列的项数与首项x_1之间的关系的真命题, 均得8分)