2011年上海市普通高等学校春季招生考试

数学试卷

考生注意: 1. 答卷前, 考生务必在答题纸上将姓名、高考准考证号填写清楚, 并在规定的区域内贴上条形码.

2. 本试卷共有23道试题, 满分150分. 考试时间120分钟.

一、填空题(本大题满分56分)本大题共有14题, 考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果, 每个空格填对得4分, 否则一律得零分.

1. 函数$y=\lg(x-2)$的定义域是______.

2. 若集合$A=\{x|x\geqslant 1\}, B=\{x|x^2\leqslant 4\}$, 则$A\cap B=$______.

3. 在$\triangle ABC$中, 若$\tan A=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, 则$\sin A=$______.

4. 若行列式$\begin{vmatrix} 2^x & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0$, 则$x=$______.

5. 若$\sin x=\dfrac{1}{3}$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, 则$x=$______ (结果用反三角函数值表示).

6. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$的二项展开式的常数项为____.

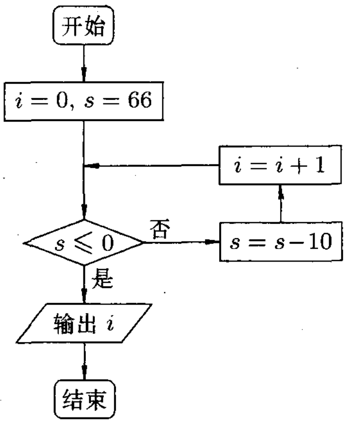
7. 两条直线$l_1: x-\sqrt{3}y+2=0$与$l_2: x-y+2=0$夹角的大小是______.

8. 若S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和, $8a_2+a_5=0$, 则$\dfrac{S_6}{S_3}=$______.

9. 若椭圆C的焦点和顶点分别是双曲线$\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$的顶点和焦点, 则椭圆$C$的方程是________.

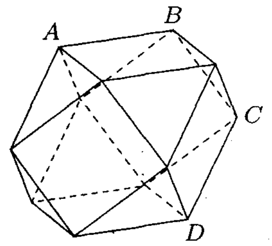
10. 若点O和点F分别为椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的中心和左焦点, 点P为椭圆上的任意一点, 则$|OP|^2+|PF|^2$的最小值为______.

11. 根据如图所示的程序框图, 输出结果$i=$______.



12. 2011年上海春季高考有8所高校招生, 如果某3位同学恰好被其中2所高校录取, 那么录取方法的种数为______.

13. 有一种多面体的饰品, 其表面由6个正方形和8个正三角形组成(如图), AB与CD所成角的大小是______.



14. 为求解方程$x^5-1=0$的虚根, 可以把原方程变形为$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$, 再变形为$(x-1)(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)=0$, 由此可得原方程的一个虚根为______.

二、选择题(本大题满分20分)本大题共有4题, 每题有且只有一个正确答案, 考生应在答题纸的相应编号上, 将代表答案的小方格涂黑, 选对得5分, 否则一律得零分.

15. 若向量$\overrightarrow{a}=(2,0)$, $\overrightarrow{b}=(1,1)$, 则下列结论正确的是 [答]( )

(A) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1$. (B) $|\overrightarrow{a}|=|\overrightarrow{b}|$.

(C) $(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$. (D) $\overrightarrow{a}/\!/\overrightarrow{b}$.

16. 函数$f(x)=\dfrac{4^x-1}{2^x}$的图像关于 [答]( )

(A) 原点对称. (B) 直线$y=x$对称.

(C) 直线$y=-x$对称. (D) y轴对称.

17. 直线$l: y=k\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$与圆$C: x^2+y^2=1$的位置关系为 [答]( )

(A) 相交或相切. (B) 相交或相离.

(C) 相切. (D) 相交.

18. 若$\overrightarrow{a_1}$、$\overrightarrow{a_2}$、$\overrightarrow{a_3}$均为单位向量, 则$\overrightarrow{a_1}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$是$\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{a_3}=(\sqrt{3},\sqrt{6})$的 [答]( )

(A) 充分不必要条件. (B) 必要不充分条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既不充分又不必要条件.

三、解答题(本大题满分74分)本大题共有5题, 解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

19. **(本题满分12分)**

已知向量$\overrightarrow{a}=(\sin 2x-1,\cos x)$, $\overrightarrow{b}=(1,2\cos x)$. 设函数$f(x)=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$, 求函数$f(x)$的最小正周期及$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时的最大值.

20. **(本题满分14分)**

某甜品店制作一种蛋筒冰淇淋, 其上半部分呈半球形、下半部分呈圆锥形(如图). 现把半径为10cm的圆形蛋皮等分成5个扇形, 用一个扇形蛋皮围成圆锥的侧面(蛋皮厚度忽略不计), 求该蛋筒冰淇淋的表面积和体积(精确到0.01).

21. **(本题满分14分)本题共有2个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分10分.**

已知抛物线$F: x^2=4y$.

(1) $\triangle ABC$的三个顶点在抛物线F上, 记$\triangle ABC$的三边AB、BC、CA所在直线的斜率分别为k_{AB}、k_{BC}、k_{CA}, 若点A在坐标原点, 求$k_{AB}-k_{BC}+k_{CA}$的值;

(2) 请你给出一个以$P(2,1)$为顶点、且其余各顶点均为抛物线F上的动点的多边形, 写出多边形各边所在直线的斜率之间的关系式, 并说明理由.

说明: 第(2)题将根据结论的一般性程度给予不同的评分.

22. **(本题满分16分)本题共有3个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分6分, 第3小题满分4分.**

定义域为$\mathbf{R}$, 且对任意实数x_1、x_2都满足不等式$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$的所有函数$f(x)$组成的集合记为$M$. 例如, 函数$f(x)=kx+b\in M$.

(1) 已知函数$f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}x, & x<0.\end{cases}$ 证明: $f(x)\in M$;

(2) 写出一个函数$f(x)$, 使得$f(x)\notin M$, 并说明理由;

(3) 写出一个函数$f(x)\in M$, 使得数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{n^2}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(-n)}{-n}=1$.

23. **(本题满分18分)本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分8分, 第3小题满分6分.**

对于给定首项$x_0>\sqrt[3]{a}$ $(a>0)$, 由递推式$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\sqrt{\dfrac{a}{x_n}}\right)$ $(n\in\mathbf{N})$得到数列$\{x_n\}$, 且对于任意的$n\in\mathbf{N}$, 都有$x_n>\sqrt[3]{a}$. 用数列$\{x_n\}$可以计算$\sqrt[3]{a}$的近似值.

(1) 取$x_0=5$, $a=100$, 计算x_1、x_2、x_3的值(精确到0.01); 归纳出x_n、x_{n+1}的大小关系;

(2) 当$n\geqslant 1$时, 证明:

$$x_n-x_{n+1}<\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_n);$$

(3) 当$x_0\in[5,10]$时, 用数列$\{x_n\}$计算$\sqrt[3]{100}$的近似值, 要求$|x_n-x_{n+1}|<10^{-4}$, 请你估计n, 并说明理由.

参考答案

一、(第1至14题)

1. $(2,+\infty)$. 2. $\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$. 3. $\dfrac{\sqrt{22}}{11}$.

4. 1. 5. $\arcsin\dfrac{1}{3}$. 6. 20. 7. $\dfrac{\pi}{12}$.

8. -7. 9. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. 10. 2. 11. 7.

12. 168. 13. $\frac{\pi}{3}$. 14. $\frac{-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{10-2\sqrt{5}}\mathrm{i}}{4}$, $\frac{-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}}\mathrm{i}}{4}$ 中的一个虚根.

二、(第15至18题)

题号	15	16	17	18
代号	C	A	D	B

三、(第19至23题)

19. [解] $f(x)=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\sin 2x-1+2\cos^2 x$

$=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,

所以, 函数$f(x)$的最小正周期$T=\pi$.

$\because\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\therefore\ 2x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.

当$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, 即$x=\frac{\pi}{8}$时, $y_{\max}=\sqrt{2}$.

20. [解] 设圆锥的底面半径为r, 高为h.

$\because\ 2\pi r=\frac{2}{5}\pi\cdot 10$,

$\therefore\ r=2$, $h=\sqrt{10^2-2^2}=4\sqrt{6}$.

表面积$S=\frac{\pi\cdot 10^2}{5}+2\pi\cdot 2^2$

$=28\pi\approx 87.96\,(\mathrm{cm}^2)$,

体积$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\times 4\sqrt{6}+\frac{2}{3}\pi\cdot 2^3$

$=\frac{16}{3}(\sqrt{6}+1)\pi\approx 57.80\,(\mathrm{cm}^3)$.

故该蛋筒冰淇淋的表面积约为$87.96\,\mathrm{cm}^2$, 体积约为$57.80\,\mathrm{cm}^3$.

21. [解] (1) 设$B(x_1,y_1)$、$C(x_2,y_2)$,

$\because\ x_1^2=4y_1$, $x_2^2=4y_2$,

$\therefore k_{AB}-k_{BC}+k_{CA}=\frac{y_1}{x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{y_2}{x_2}$

$=\frac{1}{4}x_1-\frac{1}{4}(x_1+x_2)+\frac{1}{4}x_2=0$.

(2) 本题可根据考生不同答题情况给予评分:

① 研究$\triangle PBC$.

$k_{PB}-k_{BC}+k_{CP}$

$=\frac{y_B-y_P}{x_B-x_P}-\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}+\frac{y_P-y_C}{x_P-x_C}$

$=\frac{x_P+x_B}{4}-\frac{x_B+x_C}{4}+\frac{x_C+x_P}{4}=\frac{x_P}{2}=1$. 8分

② 研究四边形$PBCD$.

$k_{PB}-k_{BC}+k_{CD}-k_{DP}$

$=\frac{x_P+x_B}{4}-\frac{x_B+x_C}{4}+\frac{x_C+x_D}{4}-\frac{x_D+x_P}{4}$

$=0$. 10分

③ 研究五边形$PBCDE$.

$k_{PB}-k_{BC}+k_{CD}-k_{DE}+k_{EP}$

$=\frac{x_P+x_B}{4}-\frac{x_B+x_C}{4}+\frac{x_C+x_D}{4}-\frac{x_D+x_E}{4}$

$+\frac{x_E+x_P}{4}=\frac{x_P}{2}=1$. 10分

④ 研究$n=2k$边形$P_1P_2\cdots P_{2k}$ $(k\in\mathbf{N}, k\geqslant 2)$, 其中$P_1=P$. 有

$k_{P_1P_2}-k_{P_2P_3}+k_{P_3P_4}-\cdots+(-1)^{2k-1}k_{P_{2k}P_1}$

$=0$. 8分

证明: 左边$=\frac{1}{4}(x_{P_1}+x_{P_2})-\frac{1}{4}(x_{P_2}+x_{P_3})+$

$\cdots+(-1)^{2k-1}\frac{1}{4}(x_{P_{2k}}+x_{P_1})$

$=\frac{x_{P_1}}{4}[1+(-1)^{2k-1}]=\frac{1+(-1)^{2k-1}}{2}=0$

$=$右边. 12分

⑤ 研究$n=2k-1$边形$P_1P_2\cdots P_{2k-1}$$(k\in\mathbf{N}, k\geqslant 2)$, 其中$P_1=P$. 有

$k_{P_1P_2}-k_{P_2P_3}+k_{P_3P_4}-\cdots+(-1)^{2k-2}k_{P_{2k-1}P_1}$

$=1$. 8分

证明: 左边$=\frac{1}{4}(x_{P_1}+x_{P_2})-\frac{1}{4}(x_{P_2}+x_{P_3})+$

$\cdots+(-1)^{2k-2}\frac{1}{4}(x_{P_{2k-1}}+x_{P_1})$

$=\frac{x_{P_1}}{4}[1+(-1)^{2k-2}]=\frac{1+(-1)^{2k-2}}{2}=1$

$=$右边. 12分

说明: 在n为奇数的研究中, 若第一个点不是P点, 当结论和证明都正确时, 在各层次的得分中分别扣2分.

⑥ 研究n边形$P_1P_2\cdots P_n$$(n\in\mathbf{N}, n\geqslant 3)$, 其中$P_1=P$. 有

$k_{P_1P_2}-k_{P_2P_3}+k_{P_3P_4}-\cdots+(-1)^{n-1}k_{P_nP_1}$

$=\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$. 10分

证明: 左边$=\frac{1}{4}(x_{P_1}+x_{P_2})-\frac{1}{4}(x_{P_2}+x_{P_3})+$

$\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{4}(x_{P_n}+x_{P_1})$

$=\frac{x_{P_1}}{4}[1+(-1)^{n-1}]=\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$

$=$右边. 14分

22. [证明] (1) 由题目给出的例子可知, 当$x_1\leqslant x_2\leqslant 0$或$0\leqslant x_1\leqslant x_2$时, 有$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$成立.

设$x_1\leqslant 0\leqslant x_2$, 且$\frac{x_1+x_2}{2}<0$, 此时

$$\because\ \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x_1+x_2\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{x_2}{4}\geqslant 0,$$
$$\therefore\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)).$$

设$x_1\leqslant 0\leqslant x_2$, 且$\frac{x_1+x_2}{2}\geqslant 0$, 此时

$$\because\ \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x_1+x_2\right)-\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-x_1}{4}\geqslant 0,$$
$$\therefore\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2)).$$

$\therefore$ 综上所述$f(x)\in M$.

[解] (2) 如函数$f(x)=-x^2$, $f(x)\notin M$.

取$x_1=-1, x_2=1$, 那么$f(x_1)=-1$, $f(x_2)=-1$, $\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))=-1$, 但是 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f(0)=0$,

$$\therefore\ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))\text{不成立}.$$

(3) 如函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 1\\ x, & x<1\end{cases}$ 满足$f(x)\in M$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2}\right)=1,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(-n)}{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n}{-n}\right)=1.$$

23. [解] (1) 经计算得$x_1=4.74$, $x_2=4.67$, $x_3=4.65$. 猜想$x_{n+1}<x_n$.

[证明] (2) $x_n-x_{n+1}-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_n)$

$$=x_n-\frac{1}{2}\left(x_n+\sqrt{\frac{a}{x_n}}\right)-\frac{1}{2}x_{n-1}+\frac{1}{2}x_n$$
$$=x_n-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x_n}}-\frac{1}{2}x_{n-1}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x_{n-1}}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x_n}}=\frac{\sqrt{a}}{2}\cdot\frac{\sqrt{x_n}-\sqrt{x_{n-1}}}{\sqrt{x_{n-1}x_n}}.$$

$\because\ x_n>\sqrt[3]{a}$,

$$x_n-x_{n+1}=x_n-\frac{1}{2}\left(x_n+\sqrt{\frac{a}{x_n}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(x_n-\sqrt{\frac{a}{x_n}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x_n^3}-\sqrt{a}}{\sqrt{x_n}}>0.$$

$\therefore x_n>x_{n+1}$. $\therefore x_n-x_{n+1}<\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_n)$.

[解] (3) 由(2)可知,

$0<x_n-x_{n+1}<\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_n)<\frac{1}{4}(x_{n-2}-x_{n-1})<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}(x_1-x_2)<\frac{1}{2^n}(x_0-x_1)$,

$\therefore$ 只要$\frac{1}{2^n}(x_0-x_1)<10^{-4}$即可, 即$2^n>10^4(x_0-x_1)$.

$$\because\ x_0-x_1=\frac{1}{2}\left(x_0-\frac{10}{\sqrt{x_0}}\right),$$
$$\therefore\ n>\log_2\left(10^4\cdot\frac{10-\sqrt{10}}{2}\right)\approx 15.1.$$

所以$n=16$.

说明: (1) 以上同[解] (3), $\therefore n>\log_2(10^4\times 10)\approx 16.61$ 所以$n=17$. 18分

(2) 在$[5,10]$中取若干个值, 由计算器计算可得, 需要计算11次可保证结论成立, 所以$n=10$. 14分

(3) 因为x_n-x_{n+1}关于x_0递增, 所以只要考虑$x_0=10$时的计算次数. 14分

由计算器计算可知11次可保证结论成立. 所以$n=10$. 16分