2012年上海市普通高等学校春季招生考试

数学试卷

本试卷共23道试题，满分150分，考试时间120分钟

一、填空题（本大题满分56分）本大题共有14题，考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果．每个空格填对得4分，否则一律得零分．

1. 已知集合$A=\{1,2,k\}$，$B=\{2,5\}$．若$A\cup B=\{1,2,3,5\}$，则$k=$______．

2. 函数$y=\sqrt{x+1}$的定义域为______．

3. 抛物线$y^2=8x$的焦点坐标为______．

4. 若复数z满足$\mathrm{i}z=1+\mathrm{i}$（i为虚数单位），则$z=$______．

5. 函数$f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$的最小正周期为______．

6. 方程$4^x-2^{x+1}=0$的解为______．

7. 若$(2x-1)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=$______．

8. 若$f(x)=\dfrac{(x+2)(x+m)}{x}$为奇函数，则实数$m=$______．

9. 函数$y=\log_2 x+\dfrac{4}{\log_2 x}\ (x\in[2,4])$的最大值是______．

10. 若复数z满足$|z-\mathrm{i}|\leqslant\sqrt{2}$（i为虚数单位），则$z$在复平面内所对应的图形的面积为______．

11. 某校要从2名男生和4名女生中选出4人担任某游泳赛事的志愿者工作，则在选出的志愿者中，男、女都有的概率为______（结果用数值表示）．

12. 若不等式$x^2-kx+k-1>0$对$x\in(1,2)$恒成立，则实数k的取值范围是______．

13. 已知等差数列$\{a_n\}$的首项及公差均为正数，令$b_n=\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{2012-n}}\ (n\in\mathbf{N}^*,n<2012)$．当$b_k$是数列$\{b_n\}$的最大项时，$k=$______．

14. 若矩阵$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$满足：$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}\in\{-1,1\}$，且$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=0$，则这样的互不相等的矩阵共有______个．

二、选择题（本大题满分20分）本大题共有4题，每题都给出四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，考生必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得5分，否则一律得零分．

15. 已知椭圆$C_1:\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$，$C_2:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1$，则　　　　[答]（　）

(A) C_1与C_2顶点相同．
(B) C_1与C_2长轴长相等．
(C) C_1与C_2短轴长相等．
(D) C_1与C_2焦距相等．

16. 记函数$y=f(x)$的反函数为$y=f^{-1}(x)$．

如果函数$y=f(x)$的图像过点$(1, 0)$, 那么函数$y=f^{-1}(x)+1$的图像过点 [答]( )

(A) $(0, 0)$. (B) $(0, 2)$.

(C) $(1, 1)$. (D) $(2, 0)$.

17. 已知空间三条直线l、m、n. 若l与m异面, 且l与n异面, 则 [答]( )

(A) m与n异面. (B) m与n相交.

(C) m与n平行.

(D) m与n异面、相交、平行均有可能.

18. 设O为$\triangle ABC$所在平面上一点. 若实数x、y、z满足 $x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$ $(x^2+y^2+z^2\neq 0)$, 则"$xyz=0$"是"点O在$\triangle ABC$的边所在直线上"的 [答]( )

(A) 充分不必要条件. (B) 必要不充分条件.

(C) 充要条件.

(D) 既不充分又不必要条件.

三、解答题(本大题满分74分)本大题共有5题, 解答下列各题必须写出必要的步骤.

19. (本题满分12分)本题共有两个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分6分.

如图1, 正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的底面边长为1, 高为2, M为线段AB的中点. 求:

(1) 三棱锥C_1-MBC的体积;

(2) 异面直线CD与MC_1所成角的大小(结果用反三角函数值表示).

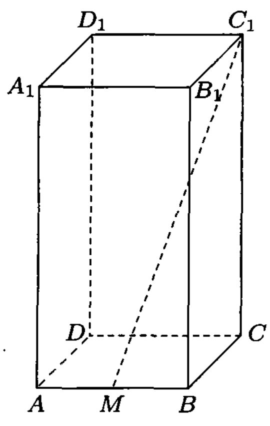

图 1

20. (本题满分14分)本题共有2个小题, 第1小题满分7分, 第2小题满分7分.

某环线地铁按内、外环线同时运行, 内、外环线的长均为30千米(忽略内、外环线长度差异).

(1) 当9列列车同时在内环线上运行时, 要使内环线乘客最长候车时间为10分钟, 求内环线列车的最小平均速度;

(2) 新调整的方案要求内环线列车平均速度为25千米/小时, 外环线列车平均速度为30千米/小时.现内、外环线共有18列列车全部投入运行, 要使内、外环线乘客的最长候车时间之差不超过1分钟, 问: 内、外环线应各投入几列列车运行?

21. (本题满分14分)本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.

已知双曲线C_1: $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$.

(1) 求与双曲线C_1有相同的焦点, 且过点$P(4,\sqrt{3})$的双曲线C_2的标准方程;

(2) 直线$l: y=x+m$分别交双曲线C_1的两条渐近线于A、B两点. 当$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$时, 求实数$m$的值.

22. (本题满分16分)本题共有3个小题, 第1小题满分4分, 第2小题满分6分, 第3小题满分6分.

已知数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$满足$(a_{n+1}-a_n)(b_{n+1}-b_n)=c_n\,(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 设$c_n=3n+6$, $\{a_n\}$是公差为3的等差数列. 当$b_1=1$时, 求b_2、b_3的值;

(2) 设$c_n=n^3$, $a_n=n^2-8n$, 求正整数k, 使得一切$n\in\mathbf{N}^*$, 均有$b_n\geqslant b_k$;

(3) 设$c_n=2^n+n$, $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$. 当$b_1=1$时, 求数列$\{b_n\}$的通项公式.

23. (本题满分18分)本题共有3个小题, 第1小题满分3分, 第2小题满分6分, 第3小题满分9分.

定义向量$\overrightarrow{OM}=(a,b)$的"相伴函数"为$f(x)=a\sin x+b\cos x$; 函数$f(x)=a\sin x+b\cos x$的"相伴向量"为$\overrightarrow{OM}=(a,b)$(其中$O$为坐标原点). 记平面内所有向量的"相伴函数"构成的集合为S.

(1) 设$g(x)=3\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+4\sin x$, 求证: $g(x)\in S$;

(2) 已知$h(x)=\cos(x+\alpha)+2\cos x$, 且$h(x)\in S$, 求其"相伴向量"的模;

(3) 已知$M(a,b)\,(b\neq 0)$为圆$C: (x-2)^2+y^2=1$上一点, 向量$\overrightarrow{OM}$的"相伴函数"$f(x)$在$x=x_0$处取到最大值. 当点M在圆C上运动时, 求$\tan 2x_0$的取值范围.

参考答案

一、(第1至14题)

1. 3. 2. $[-1,\infty)$. 3. (2, 0).
4. $1-\mathrm{i}$. 5. π. 6. $x=1$. 7. 1.
8. -2. 9. 5. 10. 2π. 11. $\frac{14}{15}$.
12. $(-\infty,2]$. 13. 1006. 14. 8.

二、(第15至18题)

题号	15	16	17	18
代号	D	B	D	C

三、(第19至23题)

19. [解] (1) $S_{\triangle MBC}=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

又C_1C为三棱锥C_1-MBC的高,

$\therefore V_{C_1-MBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle MBC}\cdot C_1C=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{6}$.

(2) $\because CD/\!/AB$,

$\therefore \angle C_1MB$为异面直线CD与MC_1所成的角(若其补角).

连结BC_1, $\because AB\perp$平面BCC_1B_1,

$\therefore AB\perp BC_1$.

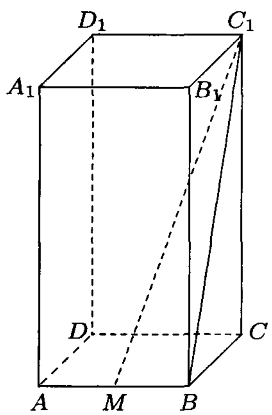

图 2

在$\mathrm{Rt}\triangle MBC_1$中,

$BC_1=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$, $MB=\frac{1}{2}$.

$\therefore \tan\angle C_1MB=\dfrac{\sqrt{5}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{5}$,

$\therefore \angle C_1MB=\arctan 2\sqrt{5}$,

即异面直线CD与MC_1所成角的大小为$\arctan 2\sqrt{5}$.

20. [解] (1) 设内环线列车运行的平均速度为v千米/小时.

由题意可知, $\frac{30}{9v}\times 60\leqslant 10$, 解得$v\geqslant 20$.

所以, 要使内环线乘客最长候车时间为10分钟, 列车的最小平均速度是20千米/小时.

(2) [解法一] 设内环线投入x列列车运行, 则外环线投入$(18-x)$列列车运行, 内、外环线乘客最长候车时间分别为t_1、t_2分钟,

则$t_1=\frac{30}{25x}\times 60=\frac{72}{x}$, $t_2=\frac{30}{30(18-x)}\times 60=\frac{60}{18-x}$,

于是有$|t_1-t_2|=\left|\frac{72}{x}-\frac{60}{18-x}\right|\leqslant 1$,

即$\begin{cases}x^2-150x+1296\leqslant 0,\\ x^2+114x-1296\leqslant 0,\end{cases}$ 解得

$\frac{150-\sqrt{17316}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{-114+\sqrt{18180}}{2}$.

又$\because x\in\mathbf{N}^*$, 所以$x=10$.

所以, 当内环线投入10列, 外环线投入8列列车运行时, 内、外环线乘客最长候车时间之差不超过1分钟.

[解法二] 设内环线投入x列列车运行, 则外环线投入$(18-x)$列列车运行, 内、外环线乘客最长候车时间分别为t_1、t_2分钟,

则$t_1=\frac{30}{25x}\times 60=\frac{72}{x}$, $t_2=\frac{30}{30(18-x)}\times 60=\frac{60}{18-x}$,

于是有$|t_1-t_2|=\left|\frac{72}{x}-\frac{60}{18-x}\right|\leqslant 1$,

记$f(x)=\frac{72}{x}+\frac{60}{x-18}\ (x<18, x\in\mathbf{N}^*)$, 则$f(x)$是单调递减函数.

又$f(9)\approx 1.33$, $f(10)=-0.30$, $f(11)\approx -2.03$, 所以$x=10$.

所以, 当内环投入10列, 外环投入8列列车运行时, 内外环线乘客最长候车时间之差不超过1分钟.

21. [解] 双曲线C_1的焦点坐标为$(\sqrt{5},0)$、$(-\sqrt{5},0)$,

设双曲线C_2的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, 则

$\begin{cases}a^2+b^2=5,\\ \frac{16}{a^2}-\frac{3}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1.\end{cases}$

$\therefore$ 双曲线C_2的标准方程为$\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

(2) 双曲线C_1的渐近线方程为$y=2x$, $y=$

$-2x$.

设$A(x_1,2x_1),B(x_2,-2x_2)$.

$\begin{cases} x^2-\dfrac{y^2}{4}=0, \\ y=x+m, \end{cases}$ 得$3x^2-2mx-m^2=0$,

由$\Delta=16m^2>0$, 得$m\neq 0$.

$\because x_1x_2=-\dfrac{m^2}{3}$,

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+(2x_1)(-2x_2)=-3x_1x_2$,

$\therefore m^2=3$, 即$m=\pm\sqrt{3}$.

22. [解] (1) $\because a_{n+1}-a_n=3$, $\therefore b_{n+1}-b_n=n+2$.

$\because b_1=1$, $\therefore b_2=4, b_3=8$.

(2) $\because a_{n+1}-a_n=2n-7$,

$\therefore b_{n+1}-b_n=\dfrac{n^3}{2n-7}$.

由$b_{n+1}-b_n>0$, 解得$n\geqslant 4$, 即

$b_4<b_5<b_6<\cdots$.

由$b_{n+1}-b_n<0$, 解得$n\leqslant 3$, 即

$b_1>b_2>b_3>b_4$.

$\therefore k=4$.

(3) $\because a_{n+1}-a_n=(-1)^{n+1}$, $\therefore b_{n+1}-b_n=(-1)^{n+1}(2^n+n)$.

$\therefore b_n-b_{n-1}=(-1)^n(2^{n-1}+n-1)$ $(n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*)$. ………………………………………… (*)

由(*)得: $b_2-b_1=2^1+1$,

$b_3-b_2=(-1)(2^2+2)$,

$\cdots$,

$b_{n-1}-b_{n-2}=(-1)^{n-1}(2^{n-2}+n-2)$,

$b_n-b_{n-1}=(-1)^n(2^{n-1}+n-1)$.

当$n=2k\,(k\in\mathbf{N}^*)$时, 以上各式相加得

$$\begin{aligned} &b_n-b_1\\ &=(2-2^2+\cdots-2^{n-2}+2^{n-1})\\ &\qquad+[1-2+\cdots-(n-2)+(n-1)]\\ &=\frac{2-2^{n-1}(-2)}{1-(-2)}+\frac{n}{2}\\ &=\frac{2+2^n}{3}+\frac{n}{2}, \end{aligned}$$

$\therefore b_n=\dfrac{2+2^n}{3}+\dfrac{n}{2}+1=\dfrac{2^n}{3}+\dfrac{n}{2}+\dfrac{5}{3}$.

当$n=2k-1\,(k\in\mathbf{N}^*)$时,

$b_n=b_{n+1}-(-1)^{n+1}(2^n+n)=\dfrac{2+2^{n+1}}{3}+\dfrac{n+1}{2}+1-(2^n+n)=-\dfrac{2^n}{3}-\dfrac{n}{2}+\dfrac{13}{6}$.

$$\therefore b_n=\begin{cases} -\dfrac{2^n}{3}-\dfrac{n}{2}+\dfrac{13}{6}, & n=2k-1, \\ \dfrac{2^n}{3}+\dfrac{n}{2}+\dfrac{5}{3}, & n=2k, \end{cases}\quad k\in\mathbf{N}^*.$$

23. [证明] (1) $g(x)=3\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+4\sin x=4\sin x+3\cos x$,

其"相伴向量"$\overrightarrow{OM}=(4,3)$, $\therefore g(x)\in S$.

[解] (2) $h(x)=\cos(x+\alpha)+2\cos x$

$=(\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha)+2\cos x$

$=-\sin\alpha\sin x+(\cos\alpha+2)\cos x$,

$\therefore$ 函数$h(x)$的"相伴向量"$\overrightarrow{OM}=(-\sin\alpha,\cos\alpha+2)$,

则$\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{(-\sin\alpha)^2+(\cos\alpha+2)^2}=\sqrt{5+4\cos\alpha}$.

(3) $\overrightarrow{OM}$的"相伴函数"$f(x)=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$,

其中$\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

当$x+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$时, $f(x)$取到最大值, 故$x_0=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\varphi, k\in\mathbf{Z}$.

$\therefore \tan x_0=\tan\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cot\varphi=\dfrac{a}{b}$,

$$\therefore \tan 2x_0=\frac{2\tan x_0}{1-\tan^2 x_0}=\frac{2\cdot\dfrac{a}{b}}{1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}=\frac{2}{\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}},$$

$\dfrac{b}{a}$为直线OM的斜率, 由几何意义知,

$\dfrac{b}{a}\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

令$m=\dfrac{b}{a}$, 则$\tan 2x_0=\dfrac{2}{m-\dfrac{1}{m}}$, $m\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

当$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqslant m<0$时, 函数$\tan 2x_0=\dfrac{2}{m-\dfrac{1}{m}}$单调递减, $\therefore 0<\tan 2x_0\leqslant\sqrt{3}$;

当$0<m\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时, 函数$\tan 2x_0=\dfrac{2}{m-\dfrac{1}{m}}$单调递减, $\therefore -\sqrt{3}\leqslant\tan 2x_0<0$.

综上所述, $\tan 2x_0\in[-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3}]$.