2013年上海市普通高等学校春季招生统一考试
（暨上海市普通高中学业水平考试）
数学试卷

考生注意：

1．本试卷两考合一，春季高考=学业水平考+附加题；
春季高考，共31道试题，满分150分．考试时间120分钟
（学业水平考，共29道试题，满分120分．考试时间90分钟；
其中第29题，第31题为附加题，满分30分．考试时间30分钟）．

2．本试卷分设试卷和答题纸．试卷包括试题与答题要求．作答必须涂（选择题）或写（非选择题）在答题纸上，在试卷上作答一律不得分．

3．答卷前，务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚的填写姓名、准考证号，并将核对后的条形码贴在指定位置上，在答题纸反面清楚地填写姓名．

一、填空题（本大题共有12题，满分36分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得3分，否则一律得零分．

1．函数 $y=\log_2(x+2)$ 的定义域是______________．

2．方程 $2^x=8$ 的解是________________．

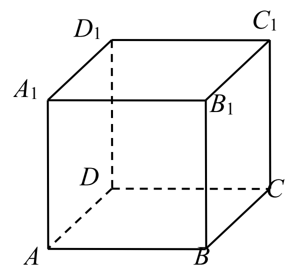
3．抛物线 $y^2=8x$ 的准线方程是______________．

4．函数 $y=2\sin x$ 的最小正周期是____________．

5．已知向量 $\vec{a}=(1,k)$，$\vec{b}=(9,k-6)$．若 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$，则实数 $k=$_________．

6．函数 $y=4\sin x+3\cos x$ 的最大值是______________．

7．复数 $2+3i$（i 是虚数单位）的模是______________．



8．在 ΔABC 中，角 A、B、C 所对边长分别为 a、b、c，若 $a=5, b=8, B=60^\circ$，则b=______________．

9．在如图所示的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角的大小为______________．

10．从4名男同学和6名女同学中随机选取3人参加某社团活动，选出的3人中男女同学都有的概率为_______．（结果用数值表示）

11．若等差数列的前6项和为23，前9项和为57，则数列的前 n 项和 $S_{\mathrm{n}}=$_________．

12．36的所有正约数之和可按如下方法得到：因为 $36=2^2\times3^2$，所以36的所有正约数之和为

$$(1+3+3^2)+(2+2\times3+2\times3^2)+(2^2+2^2\times3+2^2\times3^2)=(1+2+2^2)(1+3+3^2)=91$$

参照上述方法，可求得2000的所有正约数之和为______________________．

二、选择题（本大题共有12题，满分36分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得3分，否则一律得零分．

13．展开式为 $ad-bc$ 的行列式是（　　）

（A）$\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix}$　　(B) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$　　(C) $\begin{vmatrix} a & d \\ b & c \end{vmatrix}$　　(D) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

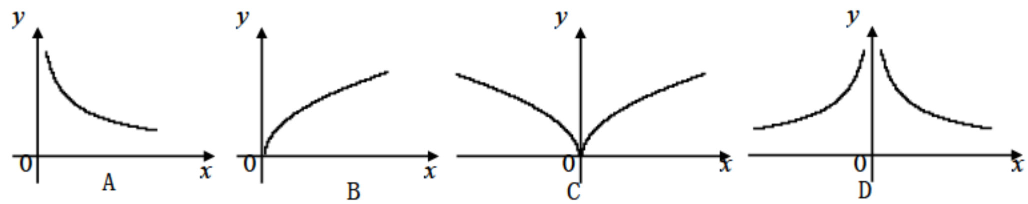
14. 设 $f^{-1}(x)$ 为函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 的反函数，下列结论正确的是（　）

(A) $f^{-1}(2)=2$　　(B) $f^{-1}(2)=4$　　(C) $f^{-1}(4)=2$　　(D) $f^{-1}(4)=4$

15. 直线 $2x-3y+1=0$ 的一个方向向量是（　　）

(A) $(2，-3)$　　(B) $(2，3)$　　(C) $(-3，2)$　　(D) $(3，2)$

16. 函数 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$ 的大致图像是（　）



17. 如果 $a<b<0$，那么下列不等式成立的是（　）

(A) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　(B) $ab<b^2$　　(C) $-ab<-a^2$　　(D) $-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$

18. 若复数 z_1、z_2 满足 $z_1=\overline{z}_2$，则 z_1、z_2 在复数平面上对应的点 Z_1、Z_2（　　）

(A)　关于 x 轴对称　　(B)关于 y 轴对称

(C)　关于原点对称　　(D)关于直线 $y=x$ 对称

19. $(1+x)^{10}$ 的二项展开式中的一项是（　）

（A）$45x$　　（B）$90x^2$　　（C）$120x^3$　　（D）$252x^4$

20. 既是偶函数又在区间 $(0,\pi)$ 上单调递减的函数是（　）

（A）$y=\sin x$　（B）$y=\cos x$　（C）$y=\sin 2x$　（D）$y=\cos 2x$

21. 若两个球的表面积之比为 $1:4$，则这两个球的体积之比为（　）

（A）$1:2$　　（B）$1:4$　　（C）$1:8$　　（D）$1:16$

22. 设全集 $U=R$，下列集合运算结果为 R 的是（　　）

（A）$Z\cup C_uN$　（B）$N\cap C_uN$　（C）$C_u(C_u\varnothing)$　（D）$C_u\{0\}$

23. 已知 a、b、$c\in R$，“$b^2-4ac<0$”是“函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图像恒在 x 轴上方”的（　）

（A）充分非必要条件　　（B）必要非充分条件

（C）充要条件　　（D）既非充分又非必要条件

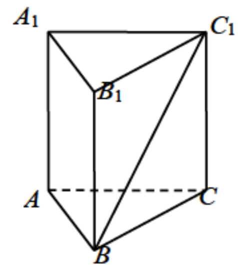
24. 已知 A、B 为平面内两定点，过该平面内动点 M 作直线 AB 的垂线，垂足为 N．若 $\overrightarrow{MN}^2=\lambda\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{NB}$，其中 λ 为常数，则动点 M 的轨迹不可能是（　）

（A）圆　　（B）椭圆　　（C）抛物线　　（D）双曲线

三、解答题（本大题共有 7 题，满分 78 分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

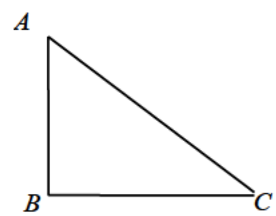
25. （本题满分 7 分）

如图，在正三棱锥 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=6$，异面直线 BC_1 与 AA_1 所成角的大小为 $\dfrac{\pi}{6}$，求该三棱柱的体积.



26. （本题满分 7 分）

如图，某校有一块形如直角三角形 ABC 的空地，其中 $\angle B$ 为直角，AB 长 40 米，BC 长 50 米，现欲在此空地上建造一间健身房，其占地形状为矩形，且 B 为矩形的一个顶点，求该健身房的最大占地面积.



27. （本题满分 8 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=-n^2+n$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=2^{a_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)$.

28．（本题满分 13 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 9 分．

已知椭圆C的两个焦点分别为$F_1(-1,0)$、$F_2(1,0)$，短轴的两个端点分别为B_1、B_2．

（1）若$\Delta F_1B_1B_2$为等边三角形，求椭圆C的方程；

（2）若椭圆C的短轴长为2，过点F_2的直线l与椭圆C相交于P、Q两点，且$\overrightarrow{F_1P}\perp\overrightarrow{F_1Q}$，求直线$l$的方程．

29．（本题满分 12 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 6 分．

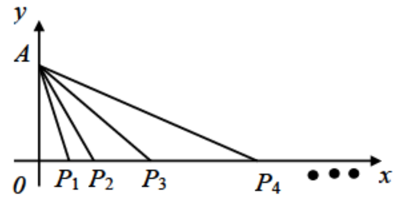
已知抛物线C: $y^2=4x$ 的焦点为F．

（1）点A、P满足$\overrightarrow{AP}=-2\overrightarrow{FA}$．当点$A$在抛物线$C$上运动时，求动点$P$的轨迹方程；

（2）在x轴上是否存在点Q，使得点Q关于直线$y=2x$的对称点在抛物线C上？如果存在，求所有满足条件的点Q的坐标；如果不存在，请说明理由．

30. **（本题满分 13 分）本题共有 2 个小题，第一小题满分 4 分，第二小题满分 9 分.**

在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 在 y 轴正半轴上，点 P_n 在 x 轴上，其横坐标为 x_n，且 $\{x_n\}$ 是首项为 1、公比为 2 的等比数列，记 $\angle P_nAP_{n+1}=\theta_n$，$n\in N^*$.



（1）若 $\theta_3=\arctan\dfrac{1}{3}$，求点 A 的坐标；

（2）若点 A 的坐标为 $(0,8\sqrt{2})$，求 θ_n 的最大值及相应 n 的值.

31. **（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 5 分，第 2 小题满分 7 分，第 3 小题满分 6 分.**

已知真命题："函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $P(a、b)$ 成中心对称图形"的充要条件为"函数 $y=f(x+a)-b$ 是奇函数".

（1）将函数 $g(x)=x^3-3x^2$ 的图像向左平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位，求此时图像对应的函数解析式，并利用题设中的真命题求函数 $g(x)$ 图像对称中心的坐标；

（2）求函数 $h(x)=\log_2\dfrac{2x}{4-x}$ 图像对称中心的坐标；

（3）已知命题："函数 $y=f(x)$ 的图像关于某直线成轴对称图像"的充要条件为"存在实数 a 和 b，使得函数 $y=f(x+a)-b$ 是偶函数"。判断该命题的真假。如果是真命题，请给予证明；如果是假命题，请说明理由，并类比题设的真命题对它进行修改，使之成为真命题（不必证明）.

参考答案

一．（第 1 至 12 题）每一题正确的给 3 分，否则一律得 0 分．

1．$(-2,+\infty)$　　2．3　　3．$x=-2$　　4．2π　　5．$-\dfrac{3}{4}$　　6．5

7．$\sqrt{13}$　　8．7　　9．$\dfrac{\pi}{3}$　　10．$\dfrac{4}{5}$　　11．$\dfrac{5}{6}n^2-\dfrac{7}{6}n$　　12．4836

二．（第 13 至 24 题）每一题正确的给 3 分，否则一律得 0 分．

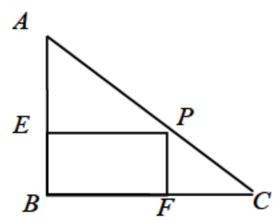
题号	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
代码	B	B	D	A	D	A	C	B	C	A	D	C

三．（第 25 至 31 题）

25．解：因为 CC_1　AA_1 .所以 $\angle BC_1C$ 为异面直线 BC_1 与 AA_1 .所成的角，即 $\angle BC_1C=\dfrac{\pi}{6}$．

在 RtΔBC_1C 中，$BC=CC_1\cdot\tan\angle BC_1C=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$,从而 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}BC^2=3\sqrt{3}$，

因此该三棱柱的体积为 $V=S_{\Delta ABC}\cdot AA_1=3\sqrt{3}\cdot 6=18\sqrt{3}$ ．



26．解：如图，设矩形为 $EBFP$，FP 长为 x 米，其中 $0<x<40$，健身房占地面积为 y 平方米。因为 $\Delta CFP \backsim \Delta CBA$，

以 $\dfrac{FP}{BA}=\dfrac{CF}{CB}$，$\dfrac{x}{40}=\dfrac{50-BF}{50}$,求得 $BF=50-\dfrac{5}{4}x$，

从而 $y=BF\cdot FP=(50-\dfrac{5}{4}x)x=-\dfrac{5}{4}x^2+50x=-\dfrac{5}{4}(x-20)^2+500\le 500$，当且仅当 $x=20$ 时，等号成立．

答：该健身房的最大占地面积为 500 平方米．

27．解：当 $n\ge 2$ 时，$a_n=s_n-s_{n-1}=-n^2+n+(n-1)^2-(n-1)=-2n+2$ ．

且 $a_1=s_1=0$，所以 $a_n=-2n+2$.

因为 $b_n=2^{-2n+2}=(\dfrac{1}{4})^{n-1}$，所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1、公比为 $\dfrac{1}{4}$ 的无穷等比数列，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$．

28．解：

（1）设椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$。根据题意知 $\begin{cases}a=2b\\ a^2-b^2=1\end{cases}$，

解得 $a^2=\frac{4}{3}$，$b^2=\frac{1}{3}$　故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{\frac{4}{3}}+\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$.

（2）容易求得椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

当直线 l 的斜率不存在时，其方程为 $x=1$，不符合题意.

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2-4k^2x+2(k^2-1)=0$.

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{2(k^2-1)}{2k^2+1},\overrightarrow{F_1P}=(x_1+1,y_1),\overrightarrow{F_1Q}=(x_2+1,y_2)$

因为 $\overrightarrow{F_1P}\perp\overrightarrow{F_1Q}$，所以 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_1Q}=0$,即 $(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2=x_1x_2+(x_1+x_2)+1+k^2(x_1-1)(x_2-1)$

$=(k^2+1)x_1x_2-(k^2-1)(x_1+x_2)+k^2+1=\frac{7k^2-1}{2k^2+1}=0$，解得 $k^2=\frac{1}{7}$，即 $k=\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$.

故直线 l 的方程为 $x+\sqrt{7}y-1=0$ 或 $x-\sqrt{7}y-1=0$.

29．解：

（1）设动点 P 的坐标为 (x,y)，点 A 的坐标为 (x_A,y_A),则 $\overrightarrow{AP}=(x-x_A,y-y_A)$，

因为 F 的坐标为 $(1,0)$，所以 $\overrightarrow{FA}=(x_A-1,y_A)$，由 $\overrightarrow{AP}=-2\overrightarrow{FA}$ 得 $(x-x_A,y-y_A)=-2(x_A-1,y_A)$.

即 $\begin{cases} x-x_A=-2(x_A-1) \\ y-y_A=-2y_A \end{cases}$；解得 $\begin{cases} x_A=2-x \\ y_A=-y \end{cases}$　代入 $y^2=4x$，得到动点 P 的轨迹方程为 $y^2=8-4x$.

（2）设点 Q 的坐标为 $(t,0)$.点 Q 关于直线 $y=2x$ 的对称点为 $Q'(x,y)$，

则 $\begin{cases} \frac{y}{x-t}=-\frac{1}{2} \\ \frac{y}{2}=x+t \end{cases}$　解得 $\begin{cases} x=-\frac{3}{5}t \\ y=\frac{4}{5}t \end{cases}$，若 Q' 在 C 上，将 Q' 的坐标代入 $y^2=4x$，

得 $4t^2+15t=0$，即 $t=0$ 或 $t=-\frac{15}{4}$. 所以存在满足题意的点 Q，其坐标为 $(0,0)$ 和 $(-\frac{15}{4},0)$.

30．解：

（1）设 $A(0,t)$，根据题意，$x_n=2^{n-1}$. 由 $\theta_3=\arctan\frac{1}{3}$，知 $\tan\theta_3=\frac{1}{3}$，

而 $\tan\theta_3=\tan(\angle OAP_4-\angle OAP_3)=\dfrac{\dfrac{x_4}{t}-\dfrac{x_3}{t}}{1+\dfrac{x_4}{t}\cdot\dfrac{x_3}{t}}=\dfrac{t(x_4-x_3)}{t^2+x_4\cdot x_3}=\dfrac{4t}{t^2+32}$，

所以 $\dfrac{4t}{t^2+32}=\dfrac{1}{3}$，解得 $t=4$ 或 $t=8$ 。故点 A 的坐标为 $(0,4)$ 或 $(0,8)$.

（2）由题意，点 P_n 的坐标为 $(2^{n-1},0)$， $\tan\angle OAP_n=\dfrac{2^{n-1}}{8\sqrt{2}}$.

$$\tan\theta_n=\tan(\angle OAP_{n+1}-\angle OAP_n)=\frac{\dfrac{2^n}{8\sqrt{2}}-\dfrac{2^{n-1}}{8\sqrt{2}}}{1+\dfrac{2^n}{8\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2^{n-1}}{8\sqrt{2}}}=\frac{2^{n-1}}{8\sqrt{2}+\dfrac{2^{2n-1}}{8\sqrt{2}}}=\frac{1}{\dfrac{16\sqrt{2}}{2^n}+\dfrac{2^n}{8\sqrt{2}}}.$$

因为 $\dfrac{16\sqrt{2}}{2^n}+\dfrac{2^n}{8\sqrt{2}}\ge 2\sqrt{2}$，所以 $\tan\theta_n\le\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $\dfrac{16\sqrt{2}}{2^n}=\dfrac{2^n}{8\sqrt{2}}$，即 $n=4$ 时等号成立.

易知 $0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$, $y=\tan x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上为增函数，因此，当 $n=4$ 时，θ_n 最大，其最大值为 $\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

31．解：

（1）平移后图像对应的函数解析式为 $y=(x+1)^3-3(x+1)^2+2$，整理得 $y=x^3-3x$，

由于函数 $y=x^3-3x$ 是奇函数，由题设真命题知，函数 $g(x)$ 图像对称中心的坐标是 $(1,-2)$.

（2）设 $h(x)=\log_2\dfrac{2x}{4-x}$ 的对称中心为 $P(a,b)$，由题设知函数 $h(x+a)-b$ 是奇函数.

设 $f(x)=h(x+a)-b$, 则 $f(x)=\log_2\dfrac{2(x+a)}{4-(x+a)}-b$，即 $f(x)=\log_2\dfrac{2x+2a}{4-a-x}-b$.

由不等式 $\dfrac{2x+2a}{4-a-x}>0$ 的解集关于原点对称，得 $a=2$ 。此时 $f(x)=\log_2\dfrac{2(x+2)}{2-x}-b, x\in(-2,2)$.

任取 $x\in(-2,2)$，由 $f(-x)+f(x)=0$，得 $b=1$，

所以函数 $h(x)=\log_2\dfrac{2x}{4-x}$ 图像对称中心的坐标是 $(2,1)$.

（3）此命题是假命题.

举反例说明：函数 $f(x)=x$ 的图像关于直线 $y=-x$ 成轴对称图像，但是对任意实数 a 和 b，

函数 $y=f(x+a)-b$，即 $y=x+a-b$ 总不是偶函数.

修改后的真命题：

“函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 成轴对称图像”的充要条件是“函数 $y=f(x+a)$ 是偶函数”.