2014 年上海市普通高等学校春季招生统一考试
（暨上海市普通高中学业水平考试）
数学试卷

考生注意：
1．本试卷两考合一，春季高考=学业水平考+附加题；
（1）春季高考，共 32 道试题，满分 150 分．考试时间 120 分钟
（2）学业水平考，共 32 道试题；其中第 1-29 道试题，满分 120 分，考试时间 90 分钟；第 30-32 题为附加题，满分 30 分．考试时间 30 分钟．
2．本试卷分设试卷和答题纸．试卷包括试题与答题要求．作答必须涂（选择题）或写（非选择题）在答题纸上，在试卷上作答一律不得分．
3．答卷前，务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚的填写姓名、准考证号，并将核对后的条形码贴在指定位置上，在答题纸反面清楚地填写姓名．

一、填空题（本大题共有 12 题，满分 36 分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得 3 分，否则一律得零分．

1．若 $4^x=16$，则 $x=$_______________．

2．计算：$i(1+i)=$_______________（i 为虚数单位）．

3．1、1、2、2、5 这五个数的中位数是_______________．

4．若函数 $f(x)=x^3+a$ 为奇函数，则实数 $a=$_______________．

5．点 $O(0,0)$ 到直线 $x+y-4=0$ 的距离是_______________．

6．函数 $y=\dfrac{1}{x+1}$ 的反函数为_______________．

7．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，公差为 2，则该数列的前 n 项和 $S_n=$_______________．

8．已知 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos2\alpha=$_______________．

9．已知 a、$b\in R^+$。若 $a+b=1$，则 ab 的最大值是_______________．

10．在 10 件产品中，有 3 件次品，从中随机取出 5 件，则恰含 1 件次品的概率是______（结果用数值表示）．

11．某货船在 O 处看灯塔 M 在北偏东 $30°$ 方向，它以每小时 18 海里的速度向正北方向航行，经过 40 分钟到达 B 处，看到灯塔 M 在北偏东 $75°$ 方向，此时货船到灯塔 M 的距离为_______海里．

12．已知函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$ 与 $g(x)=mx+1-m$ 的图像相交于 A、B 两点.若动点 P 满足 $\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right|=2$，则 P 的轨迹方程为_______________．

二、选择题（本大题共有 12 题，满分 36 分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得 3 分，否则一律得零分．

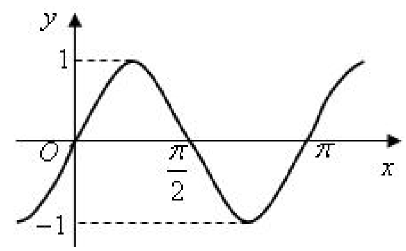
13．两条异面直线所成的角的范围是（　　）

$(A)\ (0,\dfrac{\pi}{2})$；　$(B)\ (0,\dfrac{\pi}{2}]$；　$(C)\ [0,\dfrac{\pi}{2})$；　$(D)\ [0,\dfrac{\pi}{2}]$

14．复数$2+i$（i为虚数单位）的共轭复数为（　　）

(A) $2-i$；　(B) $-2+i$；　(C) $-2-i$；　(D) $1+2i$

15．右图是下列函数中某个函数的部分图像，则该函数是（　　）



(A) $y=\sin x$；(B) $y=\sin 2x$；(C) $y=\cos x$；(D) $y=\cos 2x$

16．在$(x+1)^4$的二项展开式中，x^2项的系数为（　　）

(A) 6；　(B) 4；　(C) 2；　(D) 1

17．下列函数中，在R上为增函数的是（　　）

(A) $y=x^2$；　(B) $y=|x|$；　(C) $y=\sin x$；　(D) $y=x^3$

18．$\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=$（　　）

(A) $\cos 2\theta$；　(B) $\sin 2\theta$；　(C) 1；　(D) -1

19．设x_0为函数$f(x)=2^x+x-2$的零点，则$x_0\in$（　　）

(A) $(-2,-1)$；　(B) $(-1,0)$；　(C) $(0,1)$；　(D) $(1,2)$

20．若$a>b$，$c\in R$，则下列不等式中恒成立的是（　　）

(A) $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；　(B) $a^2>b^2$；　(C) $a|c|>b|c|$；　(D) $\frac{a}{c^2+1}>\frac{b}{c^2+1}$

21．若两个球的体积之比为$8:27$，则它们的表面积之比为（　　）

(A) $2:3$　(B) $4:9$　(C) $8:27$　(D) $2\sqrt{2}:3\sqrt{3}$

22．已知数列$\{a_n\}$是以q为公比的等比数列．若$b_n=-2a_n$，则数列$\{b_n\}$是（　　）

(A) 以q为公比的等比数列；　(B) 以$-q$为公比的等比数列；

(C) 以$2q$为公比的等比数列；　(D) 以$-2q$为公比的等比数列

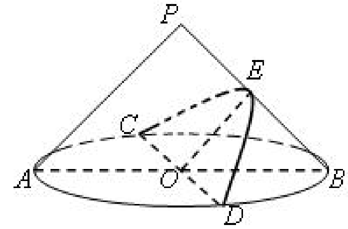
23．若点P的坐标为(a,b)，曲线C的方程为$F(x,y)=0$，则“$F(a,b)=0$”是“点P在曲线C上”的(　　)

(A) 充分非必要条件；　(B) 必要非充分条件；

(C) 充分必要条件；　(D) 既非充分又非必要条件

24．如图，在底面半径和高均为1的圆锥中，AB、CD是底面圆O的两条互相垂直的直径，E是母线PB的中点．已知过CD与E的平面与圆锥侧面的交线是以E为顶点的抛物线的一部分，则该抛物线的焦点到圆锥顶点P的距离为（　　）

(A) 1　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　(D) $\frac{\sqrt{10}}{4}$



三、解答题（本大题共有 8 题，满分 78 分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

25．（本题满分 7 分）

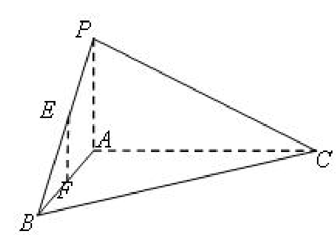
已知不等式$\dfrac{x-2}{x+1}<0$的解集为A，函数$y=\lg(x-1)$的定义域为集合B，求$A\bigcap B$.

26．（本题满分 7 分）

已知函数$f(x)=x^2-4x+a,x\in[-3,3]$. 若$f(1)=2$，求$y=f(x)$的最大值和最小值.

27．（本题满分 8 分）

如图，在体积为$\dfrac{1}{3}$的三棱锥$P-ABC$中，PA与平面ABC垂直，$AP=AB=1$，$\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$，$E$、$F$分别是$PB$、$AB$的中点. 求异面直线$EF$与$PC$所成的角的大小（结果用反三角函数值表示）.



28．（本题满分 13 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 9 分．

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的左焦点为$F$，上顶点为$B$.

（1）若直线FB的一个方向向量为$(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，求实数a的值；

（2）若$a=\sqrt{2}$，直线$l:y=kx-2$与椭圆C相交于M、N两点，且$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=3$，求实数$k$的值.

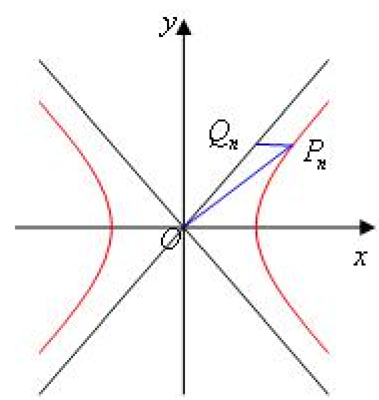
29．（本题满分 13 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 5 分，第 2 小题满分 8 分．

已知数列$\{a_n\}$满足$a_n>0$，双曲线$C_n:\dfrac{x^2}{a_n}-\dfrac{y^2}{a_{n+1}}=1(n\in N^*)$.

（1）若$a_1=1,a_2=2$，双曲线C_n的焦距为$2c_n$，$c_n=\sqrt{4n-1}$，求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）如图，在双曲线C_n的右支上取点$P_n(x_{P_n},n)$，过P_n作y轴的垂线，在第一象限内交C_n的渐近线于点Q_n，联结OP_n，记ΔOP_nQ_n的面积为S_n. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$，求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

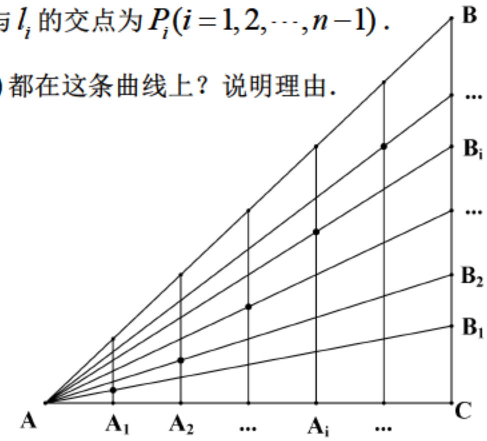
（关于数列极限的运算，还可参考如下性质：若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A(u_n\ge 0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{u_n}=\sqrt{A}$）



附加题(编注)

30．（本题满分 8 分）

已知直角三角形 ABC 的两直角边 AC 、BC 的边长分别为 b,a，如图，过 AC 边的 n 等分点 A_i 作 AC 边的垂线 d_i，过 BC 边的 n 等分点 B_i 和顶点 A 作直线 l_i，记 d_i 与 l_i 的交点为 $P_i(i=1,2,\cdots,n-1)$．是否存在一条圆锥曲线，对任意的正整数 $n\geq 2$，点 $P_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ 都在这条曲线上？说明理由．



31．（本题满分 8 分）

某人造卫星在地球赤道平面绕地球飞行，甲、乙两个监测点分别位于赤道上东经 131º和 147º，在某时刻测得甲监测点到卫星的距离为 1537.45 千米，乙监测点到卫星的距离为 887.64 千米。假设地球赤道是一个半径为 6378 千米的圆，求此时卫星所在位置的高度（结果精确到 0.01 千米）和经度（结果精确到 0.01º）．

32．（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 10 分.

如果存在非零常数 c，对于函数 $y=f(x)$ 定义域 R 上的任意 x，都有 $f(x+c)>f(x)$ 成立，那么称函数为“Z 函数”.

（1）求证：若 $y=f(x)(x\in R)$ 是单调函数，则它是“Z 函数”；

（2）若函数 $g(x)=ax^3+bx^2$ 时“Z 函数”，求实数 a,b 满足的条件.

参考答案

一、填空题（第 1 题至第 12 题）

1、2　　2、$-1+i$　　3、2　　4、0　　5、$2\sqrt{2}$　　6、$y=\dfrac{1}{x}-1$

7、n^2　　8、$-\dfrac{7}{9}$　　9、$\dfrac{1}{4}$　　10、$\dfrac{5}{12}$　　11、$6\sqrt{2}$　　12、$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

二、选择题（第 13 题至第 24 题）

13、B　　14、A　　15、B　　16、A　　17、D　　18、C

19、C　　20、D　　21、B　　22、A　　23、C　　24、D

三、解答题（第 25 题至第 29 题）

25、解：$\dfrac{x-2}{x+1}<0$ 的解集是 $A=(-1,2)$；由 $x-1>0,$ 得 $x>1$，即 $B=(1,+\infty)$；因此，$A\bigcap B=(1,2)$.

26、解：由 $f(1)=1-4+a=2$，得 $a=5$，$f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$，

因为当 $x\in[-3,2]$ 时，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)$ 单调递增；

由于 $f(-3)=26,f(2)=1,f(3)=2$，所以当 $x\in[-3,3]$ 时，$f(x)_{\max}=26$，$f(x)_{\min}=1$.

27、解：由 $V=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot|PA|=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times1\times|AC|\times1=\dfrac{1}{3},$ 得 $|\mathrm{AC}|=2$，

因为 $EF\,//\,PA$，所以异面直线 EF 与 PC 所成的角为 $\angle APC$，

由直角三角形 PAC，则 $\tan\angle APC=2$，异面直线 EF 与 PC 所成角为 $\arctan 2$.

28、解：（1）易知 $B(0,1),F(-\sqrt{a^2-1},0)$，所以 $\overrightarrow{FB}=(\sqrt{a^2-1},1)$

又因为 $(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$ 是直线 FB 的一个方向向量，所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{a^2-1}=1$，因为 $a>1$，所以 $a=2$.

（2）由 $a=\sqrt{2}$，知 $F(-1,0)$，联立 $\begin{cases}y=kx-2\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2-8kx+6=0$.

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{FM}=(x_1+1,y_1),\overrightarrow{FN}=(x_2+1,y_2)$，$x_1+x_2=\dfrac{8k}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{6}{1+2k^2}$

$$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2=(x_1+1)(x_2+1)+(kx_1-2)(kx_2-2)$$

$$=(1+k^2)x_1x_2+(1-2k)(x_1+x_2)+5=\frac{8k+11}{1+2k^2}=3$$

解得 $k=2$ 或 $k=-\dfrac{2}{3}$，又因为 $\Delta>0$，故 $k=2$.

29、（1）由题意，$a_n+a_{n+1}=4n-1$　则 $a_{n+1}+a_{n+2}=4n+3$；两式相减得：$a_{n+2}-a_n=4$

所以 $\{a_{2k-1}\}$ 是以 1 为首项，4 为公差的等差数列，得 $a_{2k-1}=1+4(k-1)=4k-3$；

$\{a_{2k}\}$ 是以 2 为首项，4 为公差的等差数列，得 $a_{2k}=2+4(k-1)=4k-2$；

所以 $a_n=\begin{cases}2n-1, n=2k-1\\ 2n-2, n=2k\end{cases}(k\in N^*).$

（2）由题意，则 $\dfrac{x_{p_n}^2}{a_n}-\dfrac{n^2}{a_{n+1}}=1$，所以 $x_{p_n}=\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}n^2+a_n}$

双曲线的渐近线 $l_{OQ_n}: y=\sqrt{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}x$，所以 $x_{Q_n}=\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}}n$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\sqrt{\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}+\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}}}=\frac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}n^2+a_n}-\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}}n)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{na_n}{\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}n^2+a_n}+\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}}n}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}+\dfrac{a_n}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}}}=\frac{1}{2}\times\lim_{n\to\infty}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\sqrt{\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}+\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}}}}=\frac{1}{2};$$

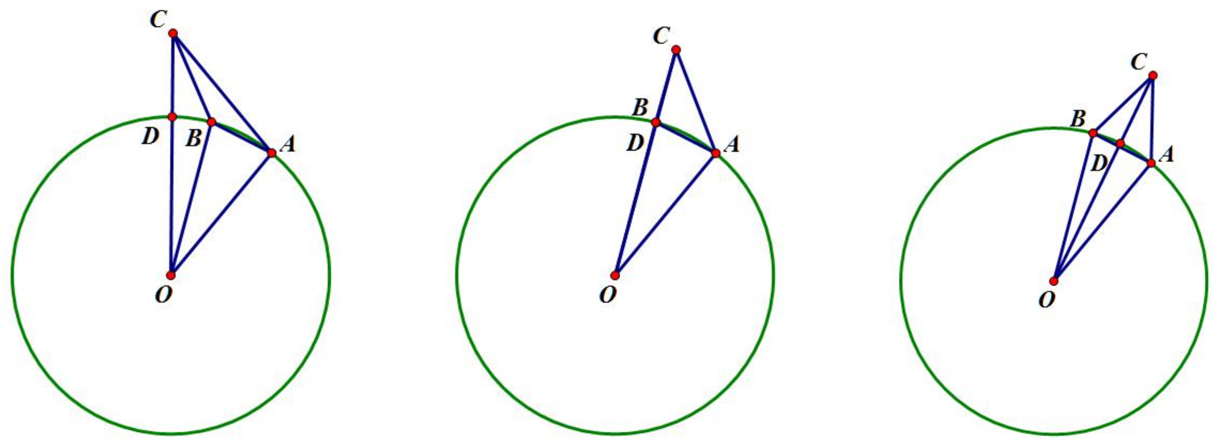
所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}$.

30、解：以 A 为坐标原点，AC 方向为 x 轴，过 A 作 AC 的垂线为 y 轴建立直角坐标系；

则 $A_i(\dfrac{i}{n}b,0)$，$B_i(b,\dfrac{i}{n}a)$，$1\le i\le n-1$ $(i\in N^*)$；$\therefore$ l_i：$y=\dfrac{ai}{bn}x$，d_i：$x=\dfrac{i}{n}b$；

$\therefore\begin{cases}y=\dfrac{ai}{bn}x\\ x=\dfrac{i}{n}b\end{cases}\Rightarrow P_i(\dfrac{i}{n}b,\dfrac{i^2}{n^2}a)\Rightarrow y=\dfrac{a}{b^2}x^2$ $\therefore$ 存在满足条件的圆锥曲线（抛物线 $y=\dfrac{a}{b^2}x$）.

31、解：如图，建立赤道截面平面图，其中 O 为球心，A、B 分别为甲、乙监测点，C 为卫星所在位置，D 为卫星在地赤道上的投影（由于题目中未说明 C 的位置，且 $AC>BC$，故有以下三种情况）.



易得$|OA|=|OB|=|OD|=6378$，$\angle AOB=16^0$，$|AC|=1537.45$，$|BC|=887.64$

$\because$ 在ΔAOB中，$|AB|=\sqrt{|OA|^2+|OB|^2-2|OA||OB|\cdot\cos\angle AOB}\approx 1775.292>|AC|>|BC|$；

$\therefore$ 在ΔABC中，$\angle ACB$最大，即$\angle BAC$、$\angle BAC=30^0$都是锐角，所以选择第三张图；

$\therefore \cos\angle BAC=\dfrac{|AB|^2+|AC|^2-|BC|^2}{2|AB||AC|}\approx\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\angle BAC\approx 30.000^\circ\Rightarrow\angle OAC\approx 112.000^\circ$；

$\therefore$ 在ΔAOC中，$|OC|=\sqrt{|AC|^2+|AO|^2-2|AC||AO|\cdot\cos\angle OAC}\approx 7098.543$；

$\therefore h=|OC|-|OD|\approx 720.543$，即卫星高度为$720.54km$；

又$\because$ 在ΔBOC中，$\cos\angle BOC=\dfrac{|OB|^2+|OC|^2-|BC|^2}{2|OB||OC|}\approx 0.997\Rightarrow\angle BOC\approx 4.415^\circ$；

$\therefore 147^\circ-4.415^\circ\approx 142.58^\circ$ $\therefore$ 即卫星位于赤道上东经142.58°.

32、解：

（1）[证明]

① 当函数$y=f(x)$是单调递增函数时，则$f(x+1)>f(x)$对任意x恒成立；

$\therefore$ 存在非零常数$c=1$，使得对任意x都有$f(x+c)>f(x)$成立；

$\therefore y=f(x)$是“Z函数”；

② 当函数$y=f(x)$是单调递减函数时，则$f(x-1)>f(x)$对任意x恒成立；

$\therefore$ 存在非零常数$c=-1$，使得对任意x都有$f(x+c)>f(x)$成立；

$\therefore y=f(x)$是“Z函数”；

（2）由题意，若函数$g(x)=ax^3+bx^2$是“Z函数”，则存在非零常数c，对于定义域R上的任意x，

都有$g(x+c)>g(x)$恒成立，即$a(x+c)^3+b(x+c)^2>ax^3+bx^2$；

化简后，得$3acx^2+(3ac^2+2bc)x+(ac^3+bc^2)>0$恒成立；

则$\begin{cases} 3ac > 0 \\ \Delta = (3ac^2 + 2bc)^2 - 4 \cdot 3ac(ac^3 + bc^2) < 0 \end{cases}$

化简后，得$\begin{cases} a > 0 \\ c > \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{|b|}{a} \geq 0 \end{cases}$或$\begin{cases} a < 0 \\ c < -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{|b|}{a} \leq 0 \end{cases}$

$\therefore$只需满足条件$\begin{cases} a \neq 0 \\ b \in R \end{cases}$.