

2015 年上海市普通高等学校春季招生统一考试
(暨上海市普通高中学业水平考试)
数学试卷

考生注意:

1. 本试卷两考合一, 春季高考=学业水平考+附加题; 春季高考, 共 36 道试题, 满分 150 分. 考试时间 130 分钟 (学业水平考, 共 29 题, 满分 120 分. 考试时间 90 分钟; 附加题共 7 题, 满分 30 分. 考试时间 40 分钟).
2. 本试卷分设试卷和答题纸. 试卷包括试题与答题要求. 作答必须涂 (选择题) 或写 (非选择题) 在答题纸上, 在试卷上作答一律不得分.
3. 答卷前, 务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚的填写姓名、准考证号, 并将核对后的条形码贴在指定位置上, 在答题纸反面清楚地填写姓名.

第 I 卷

一、填空题 (本大题共有 12 题, 满分 36 分) 考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果, 每个空格填得 3 分, 否则一律得零分.

1. 设全集 $U = \{1, 2, 3\}$. 若 $A = \{1, 2\}$, 则 $\complement_U A =$ _____.
2. 计算: $\frac{1+i}{i} =$ _____ (i 为虚数单位).
3. 函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的最小正周期为 _____.
4. 计算: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3}{2n^2 + n} =$ _____.
5. 以点 $(2, 6)$ 为圆心、1 为半径的圆的标准方程为 _____.
6. 已知向量 $\vec{a} = (1, 3)$, $\vec{b} = (m, -1)$. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $m =$ _____.
7. 函数 $y = x^2 - 2x + 4, x \in [0, 2]$ 的值域是 _____.
8. 若线性方程组的增广矩阵为 $\begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$ 、解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$, 则 $a+b =$ _____.
9. 方程 $\lg(2x+1) + \lg x = 1$ 的解为 _____.
10. 在 $(x + \frac{1}{x^2})^9$ 的二项展开式中, 常数项的值为 _____.
11. 用数字 1、2、3、4、5 组成无重复数字的三位数, 其中奇数的个数为 _____ (结果用数值表示).
12. 已知点 $A(1, 0)$, 直线 $l: x = -1$, 两个动圆均过 A 且与 l 相切, 其圆心分别为 C_1 、 C_2 . 若动点 M 满足 $2\overrightarrow{C_2M} = \overrightarrow{C_2C_1} + \overrightarrow{C_2A}$, 则 M 的轨迹方程为 _____.

二、选择题 (本大题共有 12 题, 满分 36 分) 每题有且只有一个正确答案, 考生应在答题纸相应编号上, 将代表答案的小方格涂黑, 选对得 3 分, 否则一律得零分.

13. 若 $a < 0 < b$, 则下列不等式恒成立的是 ()

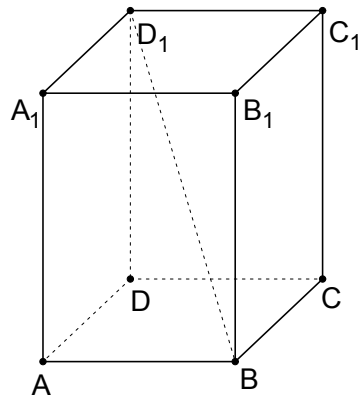
- (A) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (B) $-a > b$ (C) $a^2 > b^2$ (D) $a^3 < b^3$

14. 函数 $y = x^2 (x \geq 1)$ 的反函数为 ()
 (A) $y = \sqrt{x} (x \geq 1)$ (B) $y = \sqrt{-x} (x \leq -1)$ (C) $y = \sqrt{x} (x \geq 0)$ (D) $y = \sqrt{-x} (x \leq 0)$
15. 不等式 $\frac{2-3x}{x-1} > 0$ 的解集为 ()
 (A) $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ (B) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ (C) $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (1, +\infty)$ (D) $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$
16. 下列函数中, 是奇函数且在 $(0, +\infty)$ 单调递增的为 ()
 (A) $y = x^2$ (B) $y = x^{\frac{1}{3}}$ (C) $y = x^{-1}$ (D) $y = x^{-\frac{1}{2}}$
17. 直线 $3x - 4y - 5 = 0$ 的倾斜角为 ()
 (A) $\arctan \frac{3}{4}$ (B) $\pi - \arctan \frac{3}{4}$ (C) $\arctan \frac{4}{3}$ (D) $\pi - \arctan \frac{4}{3}$
18. 底面半径为 1、母线长为 2 的圆锥的体积是 ()
 (A) 2π (B) $\sqrt{3}\pi$ (C) $\frac{2\pi}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$
19. 以点 $(-3, 0)$ 和 $(3, 0)$ 为焦点、长轴长为 8 的椭圆方程为 ()
 (A) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ (B) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ (C) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ (D) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$
20. 在复平面上, 满足 $|z-1| = |z+i|$ (i 为虚数单位) 的复数 z 所对应的点的轨迹为 ()
 (A) 椭圆 (B) 圆 (C) 线段 (D) 直线
21. 若无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 > 0$, 公差 $d < 0$, $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 ()
 (A) S_n 单调递减 (B) S_n 单调递增 (C) S_n 有最大值 (D) S_n 有最小值
22. 已知 $a > 0, b > 0$. 若 $a + b = 4$, 则 ()
 (A) $a^2 + b^2$ 有最小值 (B) \sqrt{ab} 有最小值
 (C) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 有最大值 (D) $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ 有最大值
23. 组合数 $C_n^m + 2C_n^{m-1} + C_n^{m-2} (n \geq m \geq 2, m \in N^*, n \in N^*)$ 恒等于 ()
 (A) C_{n+2}^m (B) C_{n+2}^{m+1} (C) C_{n+1}^m (D) C_{n+1}^{m+1}
24. 设集合 $P_1 = \{x | x^2 + ax + 1 > 0\}$, $P_2 = \{x | x^2 + ax + 2 > 0\}$, $Q_1 = \{x | x^2 + x + b > 0\}$,
 $Q_2 = \{x | x^2 + 2x + b > 0\}$, 其中 $a, b \in R$. 下列说法正确的是 ()
 (A) 对任意 a , P_1 是 P_2 的子集; 对任意 b , Q_1 不是 Q_2 的子集
 (B) 对任意 a , P_1 是 P_2 的子集; 存在 b , 使得 Q_1 是 Q_2 的子集
 (C) 存在 a , 使得 P_1 不是 P_2 的子集; 对任意 b , Q_1 不是 Q_2 的子集
 (D) 存在 a , 使得 P_1 不是 P_2 的子集; 存在 b , 使得 Q_1 是 Q_2 的子集

三、解答题（本大题共有 8 题，满分 78 分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

25. （本题满分 8 分）

如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=1$ ， D_1B 和平面 $ABCD$ 所成角的大小为 $\arctan \frac{3\sqrt{2}}{4}$ ，求该四棱柱的表面积.



26. （本题满分 8 分）

已知 a 是实数，函数 $f(x) = \frac{x^2 + ax + 4}{x}$ 是奇函数，求 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值及取到最小是时 x 的值.

27. （本题满分 8 分）

某船在海平面 A 处测得灯塔 B 在北偏东 30° 方向，与 A 相距 6.0 海里. 船由 A 向正北方向航行 8.1 海里达到 C 处，这时灯塔 B 与船相距多少海里（精确到 0.1 海里）？ B 在船的什么方向（精确到 1° ）？

28. (本题满分 12 分) 本题共有 2 个小题, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 6 分.

已知点 F_1 、 F_2 依次为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, $|F_1F_2| = 6$, $B_1(0, -b)$,

$B_2(0, b)$.

(1) 若 $a = \sqrt{5}$, 以 $\vec{d} = (3, -4)$ 为方向向量的直线 l 经过 B_1 , 求 F_2 到 l 的距离;

(2) 若在双曲线 C 上存在点 P , 使得 $\vec{PB}_1 \cdot \vec{PB}_2 = -2$, 求 b 的取值范围.

29. (本题满分 12 分) 本题共有 2 个小题, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 8 分.

已知函数 $f(x) = |2^{x-2} - 2|, x \in R$.

(1) 解不等式: $f(x) < 2$;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = f(n) (n \in N^*)$, S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 对 $n \geq 4$, $S_n + \frac{1}{2} \geq ka_n$ 恒成立,

求实数 k 的取值范围.

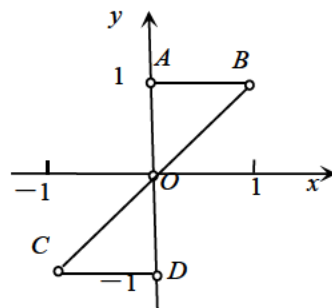
第 II 卷

一、选择题（本大题满分 9 分）本大题共有 4 题，每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得 3 分，否则一律得 0 分.

1. 对于集合 A, B ，“ $A \neq B$ ”是“ $A \cap B \subsetneq A \cup B$ ”的()
(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件 (C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件
2. 对于任意实数 a, b ， $(a-b)^2 \geq kab$ 均成立，则实数 k 的取值范围是()
(A) $\{-4, 0\}$ (B) $[-4, 0]$ (C) $(-\infty, 0]$ (D) $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n + a_{n+4} = a_{n+1} + a_{n+3}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，那么()
(A) $\{a_n\}$ 是等差数列 (B) $\{a_{2n-1}\}$ 是等差数列 (C) $\{a_{2n}\}$ 是等差数列 (D) $\{a_{3n}\}$ 是等差数列

二、填空题（本大题满分 9 分）本大题共有 3 小题，考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得 3 分，否则一律得 0 分.

4. 关于 x 的实系数一元二次方程 $x^2 + px + 2 = 0$ 的两个虚数根为 z_1, z_2 ，若 z_1, z_2 在复平面上对应的点是经过原点的椭圆的两个焦点，则该椭圆的长轴长为_____.
5. 已知圆心为 O ，半径为 1 的圆上有三点 A, B, C ，若 $7\overrightarrow{OA} + 5\overrightarrow{OB} + 8\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ，则 $|\overrightarrow{BC}| =$ _____.
6. 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像拼成如图所示的“Z”字形折线段 $ABOCD$ ，不含 $A(0,1)$ ， $B(1,1)$ ， $O(0,0)$ ， $C(-1,-1)$ ， $D(0,-1)$ 五个点，若 $f(x)$ 的图像关于原点对称的图形即为 $g(x)$ 的图像，则其中一个函数的解析式可以为_____.



三、解答题（本大题满分 12 分）解答本题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

7. 对于函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ ，若存在函数 $h(x)$ ，使得 $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ ，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的“ $h(x)$ 关联函数”。

(1) 已知 $f(x) = \sin x$ ， $g(x) = \cos x$ ，是否存在定义域为 \mathbf{R} 的函数 $h(x)$ ，使得 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的“ $h(x)$ 关联函数”？若存在，写出 $h(x)$ 的解析式；若不存在，说明理由；

(2) 已知函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 的定义域为 $[1, +\infty)$ ，当 $x \in [n, n+1)$ ，($n \in \mathbf{N}^*$) 时，

$$f(x) = 2^{n-1} \sin \frac{x}{n} - 1, \text{ 若存在函数 } h_1(x) \text{ 及 } h_2(x), \text{ 使得 } f(x) \text{ 是 } g(x) \text{ 的 “} h_1(x) \text{ 关联函数” ,}$$

且 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的“ $h_2(x)$ 关联函数”，求方程 $g(x) = 0$ 的解.

参考答案（简略版）

第 I 卷

一、填空题（第 1 题至第 12 题）

1、 $\{3\}$ 2、 $1-i$ 3、 π 4、 $\frac{1}{2}$ 5、 $(x-2)^2+(y-6)^2=1$ 6、3

7、 $[3,4]$ 8、2 9、2 10、84 11、36 12、 $y^2=2x-1$

二、选择题（第 13 题至第 24 题）

13、D 14、A 15、D 16、B 17、A 18、D

19、B 20、D 21、C 22、A 23、A 24、B

三、解答题（第 25 题至第 29 题）

25、解： $h = \frac{3}{2} \Rightarrow S = 8$.

26、解： $a = 0 \Rightarrow f(x)_{\min} = f(2) = 4$.

27、解：由余弦定理得 $x \approx 4.2$ 海里；再由正弦定理得南偏东约 46° .

28、解：

(1) $b = 2 \Rightarrow 4x + 3y + 6 = 0 \Rightarrow d = \frac{18}{5}$;

(2) 设 $P(x, y)$ ，代入化简可得 $y^2 = \frac{2}{9}b^2 \cdot (b^2 - \frac{11}{2}) \geq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{22}}{2} \leq b < 3$.

29、解：

(1) $x < 4$;

(2) 当 $n \geq 4$ 时， $a_n = 2^{n-2} - 2 \Rightarrow S_n = 2^{n-1} - 2n + \frac{9}{2} \Rightarrow k \leq \frac{2^{n-1} - 2n + 5}{2^{n-2} - 2}$;

通过数列单调性定义，可得右式当 $n = 6$ 时有最小值 $\frac{25}{14}$ ， $\therefore k \leq \frac{25}{14}$.

第 II 卷

一、选择题（第 1 题至第 3 题）

1、C 2、B 3、D

二、填空题（第 4 题至第 6 题）

4、 $2\sqrt{2}$ 5、 $\sqrt{3}$ 6、答案不唯一， $f(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$ ， $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1 \end{cases}$ 等

三、解答题（第 7 题）

解：

(1) 不存在；若 $\sin x = \cos x \cdot h(x)$ ，当 $\cos x \neq 0$ 时， $h(x) = \tan x$ ，而 $\tan x$ 的定义域不是 \mathbf{R} ，
而当 $\cos x = 0$ 时， $\sin x = 1$ 或 -1 ，等式不可能成立。

(2) 由题意，易证 $g(x)$ 与 $f(x)$ 同解。而由 $2^{n-1} \sin \frac{x}{n} - 1 = 0$ ，可得 $\sin \frac{x}{n} = \frac{1}{2^{n-1}}$ ，经过讨论，解得 $x = \frac{\pi}{2}$ 。