2019年上海春季高考数学真题

一、填空题

1．已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$， $B=\{3,5,6\}$，则 $A\cap B=$________________

2．计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{n^2-4n+1}=$________

3．不等式 $|x+1|<5$ 的解集为______

4．函数 $f(x)=x^2(x>0)$ 的反函数为___________

5．设 i 为虚数单位， $3\bar{z}-i=6+5i$，则 $|z|$ 的值为__________

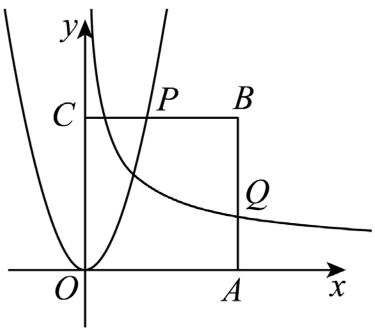
6．已知 $\begin{cases}2x+2y=-1\\4x+a^2y=a\end{cases}$，当方程有无穷多解时， a 的值为_____________.

7．在 $\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中，常数项的值为__________

8．在 ΔABC 中， $AC=3, 3\sin A=2\sin B$，且 $\cos C=\frac{1}{4}$，则 $AB=$____________

9．首届中国国际进口博览会在上海举行，某高校拟派 4 人参加连续 5 天的志愿者活动，其中甲连续参加 2 天，其他人各参加 1 天，则不同的安排方法有_____种（结果用数值表示）

10．如图，已知正方形 $OABC$，其中 $OA=a(a>1)$，函数 $y=3x^2$ 交 BC 于点 P，函数 $y=x^{-\frac{1}{2}}$ 交 AB 于点 Q，当 $|AQ|+|CP|$ 最小时，则 a 的值为_______



11．在椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 上任意一点 P， Q 与 P 关于 x 轴对称，若有 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}\le 1$，则 $\overrightarrow{F_1P}$ 与 $\overrightarrow{F_2Q}$ 的夹角范围为____________

12．已知集合 $A=[t,t+1]\cup[t+4,t+9]$，$0\notin A$，存在正数 λ，使得对任意 $a\in A$，都有 $\frac{\lambda}{a}\in A$，则 t 的值是____________

二、单选题

13．下列函数中，值域为 $[0,+\infty)$ 的是

A．$y=2^x$　　B．$y=x^{\frac{1}{2}}$　　C．$y=\tan x$　　D．$y=\cos x$

14．已知a、$b\in R$，则“$a^2>b^2$”是“$|a|>|b|$”的

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分又非必要条件

15．已知平面α，β，γ两两垂直，直线a，b，c满足$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$c\subset\gamma$，则直线a，b，c不可能满足以下哪种关系（　）

A．两两垂直　　B．两两异面　　C．两两相交　　D．两两平行

16．以$(a_1,0),(a_2,0)$为圆心的两圆均过$(1,0)$，与y轴正半轴分别交于$(0,y_1),(0,y_2)$，且满足$\ln y_1+\ln y_2=0$，则点$\left(\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2}\right)$的轨迹是

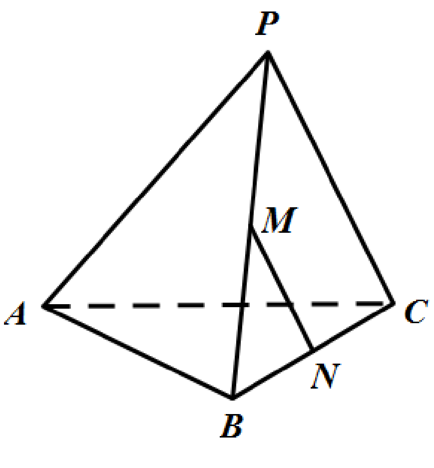
A．直线　　B．圆　　C．椭圆　　D．双曲线

三、解答题

17．如图，在正三棱锥$P-ABC$中，$PA=PB=PC=2,AB=BC=AC=\sqrt{3}$

（1）若PB的中点为M，BC的中点为N，求AC与MN的夹角；

（2）求$P-ABC$的体积.



18．已知数列$\{a_n\}$，$a_1=3$，前n项和为S_n.

（1）若$\{a_n\}$为等差数列，且$a_4=15$，求S_n；

（2）若$\{a_n\}$为等比数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}S_n<12$，求公比$q$的取值范围.

19．已知抛物线方程$y^2=4x,F$为焦点，P为抛物线准线上一点，Q为线段PF与抛物线的交点，定义：$d(P)=\frac{|PF|}{|FQ|}$.

（1）当$P\left(-1,-\frac{8}{3}\right)$时，求$d(P)$；

（2）证明：存在常数 a，使得 $2d\left(P\right)=\left|PF\right|+a$；

（3）P_1,P_2,P_3 为抛物线准线上三点，且 $\left|P_1P_2\right|=\left|P_2P_3\right|$，判断 $d\left(P_1\right)+d\left(P_3\right)$ 与 $2d\left(P_2\right)$ 的关系.

20．已知等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的公差 $d\in\left(0,\pi\right]$，数列 $\left\{b_n\right\}$ 满足 $b_n=\sin\left(a_n\right)$，集合 $S=\left\{x\mid x=b_n,n\in N^*\right\}$.

（1）若 $a_1=0,d=\dfrac{2\pi}{3}$，求集合 S；

（2）若 $a_1=\dfrac{\pi}{2}$，求 d 使得集合 S 恰好有两个元素；

（3）若集合 S 恰好有三个元素：$b_{n+T}=b_n$，T 是不超过 7 的正整数，求 T 的所有可能的值.

《2019年上海春季高考数学真题》参考答案

题号	13	14	15	16						
答案	B	C	D	A						

1．$\{3,5\}$

【分析】根据交集的定义，直接求解即可.

【详解】$\because A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{3,5,6\}$

$\therefore A\cap B=\{3,5\}$

本题正确结果：$\{3,5\}$

【点睛】本题考查集合基本运算中的交集运算，属于基础题.

2．2

【分析】将原式转化为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1-\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$，从而得到极限值为$2$.

【详解】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+1}{n^2-4n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1-\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{2}{1}=2$

本题正确结果：2

【点睛】本题考查极限运算，属于基础题.

3．$(-6,4)$

【分析】将不等式变为$-5<x+1<5$，解不等式得到结果.

【详解】$|x+1|<5 \quad \Rightarrow -5<x+1<5 \quad \Rightarrow -6<x<4$

本题正确结果：$(-6,4)$

【点睛】本题考查绝对值不等式的求解，属于基础题.

4．$y=\sqrt{x},x>0$

【分析】求解出原函数的值域，得到反函数的定义域，再求解出反函数的解析式，得到结果.

【详解】当$x>0$时，$x^2>0$，即$f(x)>0$

又$x=\sqrt{f(x)} \quad \Rightarrow y=\sqrt{x}$

$\therefore$反函数为：$y=\sqrt{x}$，$x>0$

【点睛】本题考查反函数的求解，易错点为忽略反函数的定义域.

5．$2\sqrt{2}$

【分析】把已知等式变形得$\overline{z}$，再由$|z|=|\overline{z}|$，结合复数模的计算公式求解即可.

【详解】由$3\overline{z}-i=6+5i$，得$3\overline{z}=6+6i$，即$\overline{z}=2+2i$

$\therefore |z|=|\overline{z}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

本题正确结果：$2\sqrt{2}$

【点睛】本题考查复数代数形式的乘除运算，考查复数模的求法，属于基础题.

6．-2

【分析】由题意可知两方程完全相同，通过系数化简得到方程组，求得最终结果.

【详解】方程有无穷多解 $\Rightarrow$两方程相同

又$4x+a^2y=a \quad \Rightarrow 2x+\dfrac{a^2}{2}y=\dfrac{a}{2}$

$$\therefore \begin{cases} 2=\dfrac{a^2}{2} \\ -1=\dfrac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow a=-2$$

本题正确结果：-2

【点睛】本题考查根据方程根的个数求解参数问题，属于基础题.

7．15

【分析】写出二项展开式通项，通过$6-\dfrac{3r}{2}=0$得到$r=4$，从而求得常数项.

【详解】二项展开式通项为：$C_6^r\cdot x^{6-r}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_6^r\cdot x^{6-r}\cdot x^{-\frac{r}{2}}=C_6^r\cdot x^{6-\frac{3r}{2}}$

当$6-\dfrac{3r}{2}=0$时，$r=4$

$\therefore$常数项为：$C_6^4=15$

本题正确结果：15

【点睛】本题考查二项式定理的应用，属于基础题.

8．$\sqrt{10}$

【分析】根据正弦定理求出BC，再利用余弦定理求出AB.

【详解】由正弦定理可知：$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$，又$3\sin A=2\sin B$

$\Rightarrow BC=\dfrac{AC\cdot\sin A}{\sin B}=\dfrac{2}{3}AC=2$

由余弦定理可知：$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos C=9+4-2\times3\times2\times\dfrac{1}{4}=10$

$\therefore AB=\sqrt{10}$

本题正确结果：$\sqrt{10}$

【点睛】本题考查利用正弦定理、余弦定理解三角形问题，属于基础题.

9．24

【分析】首先安排甲，可知连续2天的情况共有4种，其余的人全排列，相乘得到结果.

【详解】在5天里，连续2天的情况，一共有4种

剩下的3人全排列：A_3^3

故一共有：$4\times A_3^3=24$种

【点睛】本题考查基础的排列组合问题，解题的关键在于对排列组合问题中的特殊元素，要优先考虑，然后再考虑普通元素.

10．$\sqrt{3}$

【分析】通过函数解析式得到P,Q两点坐标，从而表示出$|AQ|+|CP|$，利用基本不等式得到最值，从而得到取最值时的条件$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$，求解得到结果.

【详解】依题意得：$P\left(\sqrt{\frac{a}{3}},a\right)$，$Q\left(a,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$

则$|AQ|+|CP|=\sqrt{\frac{a}{3}}+\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$

当且仅当$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$即$a=\sqrt{3}$时取等号，故$a=\sqrt{3}$

本题正确结果：$\sqrt{3}$

【点睛】本题考查基本不等式的应用，关键在于能够通过坐标构造出关于a的基本不等式的形式，从而利用取等条件得到结果.

11．$\left[\pi-\arccos\frac{1}{3},\pi\right]$

【分析】通过坐标表示和$\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}\leq 1$得到$y^2\in[1,2]$；利用向量数量积运算得到所求向量夹角的余弦值为：$\cos\theta=\frac{2-3y^2}{y^2+2}=-3+\frac{8}{y^2+2}$；利用$y^2$的范围得到$\cos\theta$的范围，从而得到角的范围.

【详解】由题意：$F_1\left(-\sqrt{2},0\right)$，$F_2\left(\sqrt{2},0\right)$

设$P(x,y)$，$Q(x,-y)$，因为$\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}\leq 1$，则$x^2-2+y^2\leq 1$

与$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$结合 $\Rightarrow 4-2y^2-2+y^2\leq 1$，又$y\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ $\Rightarrow y^2\in[1,2]$

$$\cos\theta=\frac{\overline{F_1P}\cdot\overline{F_2Q}}{\left|\overline{F_1P}\right|\cdot\left|\overline{F_2Q}\right|}=\frac{x^2-2-y^2}{\sqrt{\left(x+\sqrt{2}\right)^2+y^2}\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2}}=\frac{x^2-2-y^2}{\sqrt{\left(x^2+2+y^2\right)^2-\left(2\sqrt{2}x\right)^2}}$$

与$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$结合，消去$x$，可得：

$$\cos\theta=\frac{2-3y^2}{y^2+2}=-3+\frac{8}{y^2+2}\in\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$$

所以$\theta\in\left[\pi-\arccos\frac{1}{3},\pi\right]$

本题正确结果：$\left[\pi-\arccos\frac{1}{3},\pi\right]$

【点睛】本题考查向量坐标运算、向量夹角公式应用，关键在于能够通过坐标运算得到变量的取值范围，将问题转化为函数值域的求解.

12．1 或-3

【分析】根据t所处的不同范围，得到$a\in[t,t+1]$和$a\in[t+4,t+9]$时，$\frac{\lambda}{a}$所处的范围；再利用集合A的上下限，得到λ与t的等量关系，从而构造出方程，求得t的值.

【详解】$\because 0\notin A$，则只需考虑下列三种情况：

①当$t>0$时，$a\in[t,t+1]\cup[t+4,t+9]$

$\therefore\frac{1}{a}\in\left[\frac{1}{t+9},\frac{1}{t+4}\right]\cup\left[\frac{1}{t+1},\frac{1}{t}\right]$

又$\lambda>0$　$\Rightarrow\frac{\lambda}{a}\in\left[\frac{\lambda}{t+9},\frac{\lambda}{t+4}\right]\cup\left[\frac{\lambda}{t+1},\frac{\lambda}{t}\right]$

$\because\frac{\lambda}{a}\in A$　$\therefore\begin{cases}\frac{\lambda}{t+9}\geq t\\\frac{\lambda}{t+4}\leq t+1\end{cases}$且$\begin{cases}\frac{\lambda}{t+1}\geq t+4\\\frac{\lambda}{t}\leq t+9\end{cases}$

可得：$\begin{cases}t(t+9)\leq\lambda\leq t(t+9)\\(t+1)(t+4)\leq\lambda\leq(t+1)(t+4)\end{cases}$

$\therefore\lambda=t(t+9)=(t+1)(t+4)$　$\Rightarrow t=1$

②当$t+9<0$即$t<-9$时，与①构造方程相同，即$t=1$，不合题意，舍去

③当$\begin{cases}t+1<0\\t+4>0\end{cases}$即$-4<t<-1$时

可得：$\begin{cases}\frac{\lambda}{t+1}\geq t\\\frac{\lambda}{t}\leq t+1\end{cases}$且$\begin{cases}\frac{\lambda}{t+9}\geq t+4\\\frac{\lambda}{t+4}\leq t+9\end{cases}$

$\therefore\lambda=t(t+1)=(t+4)(t+9)$　$\Rightarrow t=-3$

综上所述：$t=1$或-3

【点睛】本题考查利用集合与元素的关系求解参数的取值问题，关键在于能够通过t的不同取值范围，得到a与$\dfrac{\lambda}{a}$所处的范围，从而能够利用集合的上下限得到关于λ的等量关系，从而构造出关于t的方程；难点在于能够准确地对t的范围进行分类，对于学生的分析和归纳能力有较高的要求，属于难题.

13．B

【分析】依次判断各个函数的值域，从而得到结果.

【详解】A选项：$y=2^x$值域为$(0,+\infty)$，错误

B选项：$y=x^{\frac{1}{2}}$值域为$[0,+\infty)$，正确

C选项：$y=\tan x$值域为R，错误

D选项：$y=\cos x$值域为$[-1,1]$，错误

本题正确选项：B

【点睛】本题考查初等函数的值域问题，属于基础题.

14．C

【分析】通过函数$y=x^2$的图象可知，函数值与自变量距对称轴距离成正比，由此可判断为充要条件.

【详解】设$y=x^2$，可知函数对称轴为$x=0$

由函数对称性可知，自变量离对称轴越远，函数值越大；反之亦成立

由此可知：当$|a-0|>|b-0|$，即$|a|>|b|$时，$a^2>b^2$

当$a^2>b^2$时，可得$|a-0|>|b-0|$，即$|a|>|b|$

可知“$a^2>b^2$”是“$|a|>|b|$”的充要条件

本题正确选项：C

【点睛】本题考查充分必要条件的判断问题，属于基础题.

15．D

【分析】对 ABC 作出相应空间图形即可；对 D，通过反证法即可得到其无法两两平行.

【详解】如图 1，可得a，b，c可能两两垂直，故 A 正确；

如图 2，可得a，b，c可能两两相交，故 C 正确；

如图 3，可得a，b，c可能两两异面，故 B 正确；

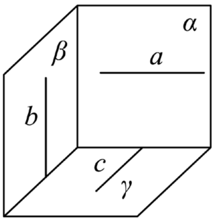


图1

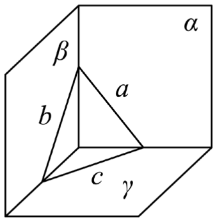


图2

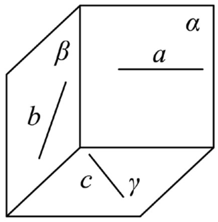


图3

对 D，设 $\alpha \cap \beta = l$，且 l 与 a,b 均不重合，

假设：$a//b//c$，由 $a//b$ 可得：$a//\beta$，$b//\alpha$，

又 $\alpha \cap \beta = l$，可知 $a//l$，$b//l$，

又 $a//b//c$，可得：$c//l$，

因为 α,β,γ 两两互相垂直，可知 l 与 γ 相交，即 l 与 c 相交或异面，

若 l 与 a 或 b 重合，同理可得 l 与 c 相交或异面，

可知假设错误，由此可知三条直线不能两两平行，故 D 错误.

故选：D.

16．A

【分析】根据圆心和圆上点建立关于半径的方程，得到 $y_1^2 = 1 - 2a_1$ 和 $y_2^2 = 1 - 2a_2$；根据 $\ln y_1 + \ln y_2 = 0$ 整理出 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 2$，从而得到点的轨迹.

【详解】因为 $r_1 = |1 - a_1| = \sqrt{a_1^2 + y_1^2} \quad \Rightarrow y_1^2 = 1 - 2a_1$

同理：$y_2^2 = 1 - 2a_2$

又因为 $\ln y_1 + \ln y_2 = 0$，所以 $y_1 y_2 = 1$

则 $(1 - 2a_1)(1 - 2a_2) = 1$，即 $2a_1 a_2 = a_1 + a_2 \quad \Rightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 2$

设 $\begin{cases} x = \frac{1}{a_1} \\ y = \frac{1}{a_2} \end{cases}$，则 $x + y = 2$ 为直线

本题正确选项：A

【点睛】本题考查动点的轨迹方程的求解问题，关键在于能够将所求动点的横纵坐标建立起等量关系，从而转化为轨迹方程.

17.（1）$\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$；（2）$\frac{3}{4}$

【分析】（1）由中位线可知 $MN//PC$，从而所求夹角即为 $\angle PCA$，根据余弦定理，可求得余弦值，从而得到 $\angle PCA$ 的大小；（2）根据正三棱锥的性质，可求得几何体的高 $PO = \sqrt{3}$，再根据棱锥体积公式求得结果.

【详解】(1) M,N 分别为 PB,BC 中点，可知：$MN//PC$

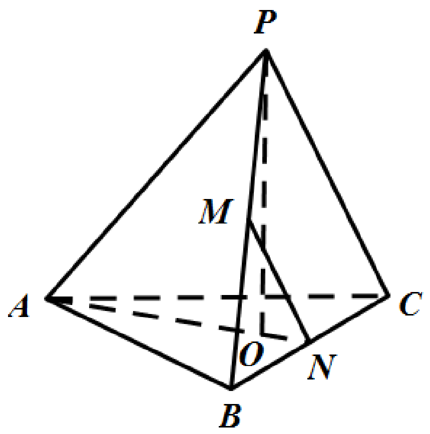
$\therefore AC$ 与 MN 夹角即为 AC 与 PC 夹角 $\angle PCA$

在 ΔPCA 中，由余弦定理可得：$\cos\angle PCA=\dfrac{PC^2+AC^2-PA^2}{2PC\cdot AC}=\dfrac{4+3-4}{2\times 2\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore \angle PCA=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

即 AC 与 MN 的夹角为 $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(2) 作 $PO\perp$ 面 ABC，连接 AN，如下图所示：



$\because$ 三棱锥为正三棱锥

$\therefore O$ 为 ΔABC 的中心且落在 AN 上

$\therefore AO=\dfrac{2}{3}AN=\dfrac{2}{3}\sqrt{AB^2-BN^2}=\dfrac{2}{3}\times\sqrt{3-\dfrac{3}{4}}=1$

$PO=\sqrt{PA^2-AO^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$

$\therefore V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot PO=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}=\dfrac{3}{4}$

【点睛】本题考查异面直线所成角、空间几何体体积的求解问题.求解异面直线所成角问题的关键在于能够通过平行关系将直线进行平移，转化为相交直线所成角的问题.

18.(1) $S_n=2n^2+n$；(2) $(-1,0)\cup\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$；

【分析】(1) 通过 a_4，求解出 d，通过求和公式得到 S_n；(2) 根据 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n<12$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-q^n}{1-q}<4$ 且 $|q|<1$，从而得到不等式 $\dfrac{1}{1-q}<4$，解不等式得到结果.

【详解】(1) 由 $a_4=a_1+3d=15$ 且 $a_1=3\quad\Rightarrow d=4$

$\therefore S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=3n+2n(n-1)=2n^2+n$

(2) 由题意可知 $q\neq 1$

$\therefore S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{3(1-q^n)}{1-q}$

则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\left(1-q^n\right)}{1-q}<12 \quad \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-q^n}{1-q}<4$且$|q|<1$

$\therefore \dfrac{1}{1-q}<4 \quad \Rightarrow q<\dfrac{3}{4}$或$q>1$

又$|q|<1 \quad \Rightarrow q\in(-1,0)\cup\left(0,\dfrac{3}{4}\right)$

【点睛】本题考查等差数列求和、等比数列前n项和的应用问题.利用等比数列前n项和的极限求解q的范围的关键在于能够明确存在极限的前提，然后通过公式得到关于q的不等式，求解不等式得到结果.

19.（1）$\dfrac{8}{3}$；（2）2；（3）见解析

【分析】(1) 求解出Q点坐标，然后得到$|PF|$和$|FQ|$，从而求得$d(P)$；（2）通过假设P点坐标得到直线PF方程，与抛物线联立后得到y_Q，代入$2d(P)-|PF|$，整理得到结果；（3）由$|P_1P_2|=|P_2P_3|$可知P_2为P_1,P_3中点，假设三点坐标，代入$2\left[d(P_1)+d(P_3)\right]-4d(P_2)$，将式子整理为$y_1$和$y_3$的形式，然后通过平方运算可得到$2\left[d(P_1)+d(P_3)\right]-4d(P_2)>0$，从而得到结论：$d(P_1)+d(P_3)>2d(P_2)$.

【详解】由题意可知：$F(1,0)$，准线方程为：$x=-1$

（1）因为$k_{PF}=\dfrac{\frac{8}{3}}{2}=\dfrac{4}{3} \quad \Rightarrow y=\dfrac{4}{3}(x-1)$

联立方程$\begin{cases} y=\dfrac{4}{3}(x-1) \\ y^2=4x \end{cases} \quad \Rightarrow x_Q=\dfrac{1}{4}$

则$\begin{cases} |PF|=\sqrt{(-1-1)^2+\left(-\dfrac{8}{3}-0\right)^2}=\dfrac{10}{3} \\ |QF|=x_Q+1=\dfrac{5}{4} \end{cases} \quad \Rightarrow d(P)=\dfrac{8}{3}$

（2）当$P(-1,0)$时，易得$a=2d(P)-|PF|=2$

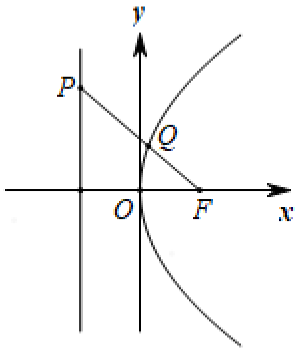
设$P(-1,y_P)$，$y_P>0$，直线$PF: x=my+1$，则$my_P=-2$

联立$\begin{cases} x=my+1 \\ y^2=4x \end{cases}$，$y^2-4my-4=0$

$\therefore y_Q=\dfrac{4m+\sqrt{(4m)^2+16}}{2}=2m+2\sqrt{m^2+1}$

$2d(P)-|PF|=2\dfrac{y_P}{y_Q}-\sqrt{1+m^2}\,y_P=2\dfrac{-2}{m\left(2m+2\sqrt{m^2+1}\right)}+\dfrac{2\sqrt{1+m^2}}{m}$

$=-2\dfrac{\sqrt{m^2+1}-m}{m}+\dfrac{2\sqrt{1+m^2}}{m}=2$



由对称性可知 $y_P<0$ 亦成立

综上所述，存在 $a=2$，使得 $2d(P)=|PF|+a$

（3）由 $|P_1P_2|=|P_2P_3|$ 可知 P_2 为 P_1,P_3 中点

设 $P_1(-1,y_1),P_2(-1,y_2),P_3(-1,y_3)$，则

$$2\left[d(P_1)+d(P_3)\right]-4d(P_2)=|P_1F|+|P_3F|-2|P_2F|=\sqrt{y_1^2+4}+\sqrt{y_3^2+4}-2\sqrt{y_2^2+4}$$

$$=\sqrt{y_1^2+4}+\sqrt{y_3^2+4}-2\sqrt{\left(\frac{y_1+y_3}{2}\right)^2+4}=\sqrt{y_1^2+4}+\sqrt{y_3^2+4}-\sqrt{(y_1+y_3)^2+16}$$

因为 $\left(\sqrt{y_1^2+4}+\sqrt{y_3^2+4}\right)^2-\left[(y_1+y_3)^2+16\right]=2\sqrt{y_1^2+4}\sqrt{y_3^2+4}-2y_1y_2-8$

又因 $(y_1^2+4)(y_3^2+4)-(y_1y_3+4)^2=4(y_1^2+y_3^2)-8y_1y_3>0$

所以 $d(P_1)+d(P_3)>2d(P_2)$

【点睛】本题考查抛物线中的定值问题、直线与抛物线的综合应用.解决第三问三者之间关系的关键是能够明确问题的本题，其本质为三角形中的三边关系问题：AE 为 ΔABC 的中线，则由三角形两边之和大于第三边，可知 $2AE>AB+AC$；明确本质之后即明确了证明方向，对于学生的转化与化归能力要求较高.

20.（1）$S=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$；（2）$d=\frac{2\pi}{3}$ 或 $d=\pi$；（3）$T=3,4,5,6$

【分析】(1）根据正弦函数周期性的特点，可知数列 $\{b_n\}$ 周期为 3，从而得到 S；（2）S 恰好有两个元素，可知 $b_1=b_3$ 或者 $b_2=b_3$，求解得到 d 的取值；（3）依次讨论 $T=3,4,5,6,7$ 的情况，当 $T=3,4,5,6$ 时，均可得到符合题意的集合 S；当 $T=7$ 时，对于 $k=1,2,3$，均无法得到符合题意的集合 S，从而通过讨论可知 $T=3,4,5,6$.

【详解】(1）$a_1=0$，$d=\frac{2\pi}{3}$ $\Rightarrow a_2=\frac{2\pi}{3}$，$a_3=\frac{4\pi}{3}$，$a_4=2\pi$

$\therefore b_1=\sin 0=0$，$b_2=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b_3=\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$b_4=0$

由周期性可知，b_n 以 3 为周期进行循环

$$\Rightarrow S=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

（2）$b_1=\sin\frac{\pi}{2}=1$，$b_2=\sin\left(\frac{\pi}{2}+d\right)$，$b_3=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2d\right)$

$\because$ S恰好有两个元素

$\therefore \sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2d\right)$或$\sin\left(\frac{\pi}{2}+d\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2d\right)$

即$2d=2\pi$或$\frac{\pi}{2}+d+\frac{\pi}{2}+2d=2\pi$

$\Rightarrow d=\pi$或$d=\frac{2\pi}{3}$

（3）由S恰好有3个元素可知：$T\geq 3$

当$T=3$时，$b_{n+3}=b_n$，集合$S=\{b_1,b_2,b_3\}$，符合题意；

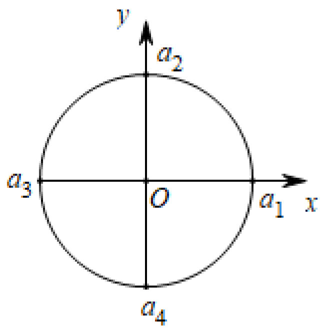
当$T=4$时，$b_{n+4}=b_n$，$\sin(a_n+4d)=\sin a_n$

$a_n+4d=a_n+2k\pi$或$a_n+4d=2k\pi-a_n$

因为$\{a_n\}$为公差$d>0$的等差数列，故$a_n+4d=a_n+2k\pi$ $\Rightarrow d=\frac{k\pi}{2}$

又$d\leq\pi$，故$k=1,2$

当$k=1$时，如图取$a_1=0$，$S=\{0,1,-1\}$，符合条件



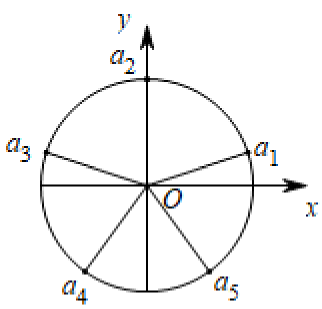
当$T=5$时，$b_{n+5}=b_n$，$\sin(a_n+5d)=\sin a_n$

$a_n+5d=a_n+2k\pi$或$a_n+5d=2k\pi-a_n$

因为$\{a_n\}$为公差$d>0$的等差数列，故$a_n+5d=a_n+2k\pi$ $\Rightarrow d=\frac{2k\pi}{5}$

又$d\leq\pi$，故$k=1,2$

当$k=1$时，如图取$a_1=\frac{\pi}{10}$，$S=\left\{\sin\frac{\pi}{10},1,-\sin\frac{3\pi}{10}\right\}$，符合条件



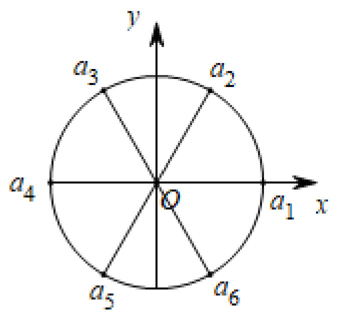
当$T=6$时，$b_{n+6}=b_n$，$\sin\left(a_n+6d\right)=\sin a_n$

$a_n+6d=a_n+2k\pi$ 或 $a_n+6d=2k\pi-a_n$

因为$\left\{a_n\right\}$为公差$d>0$的等差数列，故 $a_n+6d=a_n+2k\pi \quad \Rightarrow d=\dfrac{k\pi}{3}$

又$d\le\pi$，故$k=1,2,3$

当$k=1$时，如图取$a_1=0$时，$S=\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$，符合条件



当$T=7$时，$b_{n+7}=b_n$，$\sin\left(a_n+7d\right)=\sin a_n$

$a_n+7d=a_n+2k\pi$ 或 $a_n+7d=2k\pi-a_n$

因为$\left\{a_n\right\}$为公差$d>0$的等差数列，故 $a_n+7d=a_n+2k\pi \quad \Rightarrow d=\dfrac{2k\pi}{7}$

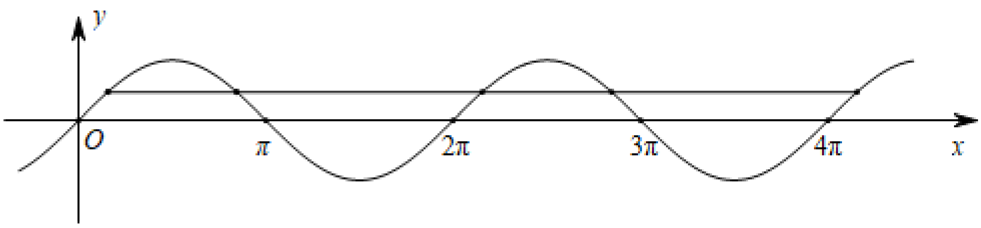
又$d\le\pi$，故$k=1,2,3$

当$k=1$时，因为$b_1,b_2,\cdots,b_7$对应3个正弦值，故必有一个正弦值对应三个点，必然有$a_m-a_n=2\pi$，即$(m-n)d=2\pi,d=\dfrac{2\pi}{m-n}$，

即$\dfrac{2\pi}{m-n}=\dfrac{2\pi}{7}$，$m-n=7,m>7$，不符合条件；

当$k=2$时，因为$b_1,b_2,\cdots,b_7$对应3个正弦值，故必有一个正弦值对应三个点，必然有$a_m-a_n=2\pi$，即$(m-n)d=2\pi,d=\dfrac{2\pi}{m-n}$，

即$\dfrac{2\pi}{m-n}=\dfrac{4\pi}{7}$，$m-n$不是整数，故不符合条件；



当$k=3$时，因为$b_1,b_2,\cdots,b_7$对应3个正弦值，故必有一个正弦值对应三个点，必然有$a_m-a_n=2\pi$或4π

若$(m-n)d=2\pi,d=\dfrac{2\pi}{m-n}$，即$\dfrac{2\pi}{m-n}=\dfrac{6\pi}{7}$，$m-n$不是整数，

若$(m-n)d=4\pi,d=\dfrac{4\pi}{m-n}$，即$\dfrac{4\pi}{m-n}=\dfrac{6\pi}{7}$，$m-n$不是整数，

故$k=3$不符合条件；

综上：$T=3,4,5,6$

【点睛】本题考查三角函数、数列、函数周期性的综合应用问题.解题的难点在于能够周期，确定等量关系，从而得到d的取值，再根据集合S的元素个数，讨论可能的取值情况，通过特殊值确定满足条件的T；对于无法取得特殊值的情况，找到不满足条件的具体原因.本题对于学生的综合应用能力要求较高，属于难题.