2020年上海市春季高考数学试卷

一、填空题（本大题共12题，满分54分，第1~6题每题4分，第7-12题每题5分）

1．集合 $A=\{1,3\}$，$B=\{1,2,a\}$，若 $A\subseteq B$，则 $a=$____．

2．不等式 $\frac{1}{x}>3$ 的解集为____．

3．函数 $y=\tan 2x$ 的最小正周期为____．

4．已知复数 z 满足 $z+2\overline{z}=6+i$，则 z 的实部为____．

5．已知 $3\sin 2x=2\sin x$，$x\in(0,\pi)$，则 $x=$____．

6．若函数 $y=a\cdot 3^{x}+\frac{1}{3^{x}}$ 为偶函数，则 $a=$____．

7．已知直线 $l_1:x+ay=1$，$l_2:ax+y=1$，若 $l_1\parallel l_2$，则 l_1 与 l_2 的距离为____．

8．已知二项式 $(2x+\sqrt{x})^{5}$，则展开式中 x^{3} 的系数为____．

9．三角形 ABC 中，D 是 BC 中点，$AB=2$，$BC=3$，$AC=4$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=$____．

10．已知 $A=\{-3，-2，-1，0，1，2，3\}$，a、$b\in A$，则 $|a|<|b|$ 的情况有____种．

11．已知 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 五个点，满足 $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\cdot\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}=0(n=1,2,3)$，$|\overrightarrow{A_nA_{n+1}}|\cdot|\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}|=n+1(n=1,2,3)$，则 $|\overrightarrow{A_1A_5}|$ 的最小值为____．

12．已知 $f(x)=\sqrt{x-1}$，其反函数为 $f^{-1}(x)$，若 $f^{-1}(x)-a=f(x+a)$ 有实数根，则 a 的取值范围为____．

二、选择题（本大题共4题，每题5分，共20分）

13．计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n}+5^{n}}{3^{n-1}+5^{n-1}}=(\quad)$

A．3　　B．$\frac{5}{3}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．5

14．“$\alpha=\beta$”是“$\sin^{2}\alpha+\cos^{2}\beta=1$”的(　　)

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分又非必要条件

15．已知椭圆 $\frac{x^{2}}{2}+y^{2}=1$，作垂直于 x 轴的垂线交椭圆于 A、B 两点，作垂直于 y 轴的垂线交椭圆于 C、D 两点，且 $AB=CD$，两垂线相交于点 P，则点 P 的轨迹是(　　)

A．椭圆　　B．双曲线　　C．圆　　D．抛物线

16．数列 $\{a_n\}$ 各项均为实数，对任意 $n\in N^{*}$ 满足 $a_{n+3}=a_n$，且行列式 $\begin{vmatrix}a_n & a_{n+1}\\ a_{n+2} & a_{n+3}\end{vmatrix}=c$ 为定值，则下列选项中不可能的是(　　)

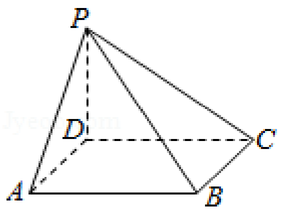
A．$a_1=1$，$c=1$　　B．$a_1=2$，$c=2$　　C．$a_1=-1$，$c=4$　　D．$a_1=2$，$c=0$

三、解答题（本大题共5题，共14+14+14+16+18＝76分）

17．（14分）已知四棱锥 $P-ABCD$，底面 $ABCD$ 为正方形，边长为3，$PD\perp$ 平面 $ABCD$．

（1）若 $PC=5$，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；

（2）若直线 AD 与 BP 的夹角为 60°，求 PD 的长．



18．（14分）已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$，其前 n 项和为 S_n，$a_1=1$．

（1）若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$S_{10}=70$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_4=\frac{1}{8}$，求满足$S_n>100a_n$时n的最小值．

19．（14 分）有一条长为 120 米的步行道OA，A是垃圾投放点ω_1，若以O为原点，OA为x轴正半轴建立直角坐标系，设点$B(x,0)$，现要建设另一座垃圾投放点$\omega_2(t,0)$，函数$f_t(x)$表示与B点距离最近的垃圾投放点的距离．

（1）若$t=60$，求$f_{60}(10)$、$f_{60}(80)$、$f_{60}(95)$的值，并写出$f_{60}(x)$的函数解析式；

（2）若可以通过$f_t(x)$与坐标轴围成的面积来测算扔垃圾的便利程度，面积越小越便利．问：垃圾投放点ω_2建在何处才能比建在中点时更加便利？

20．（16 分）已知抛物线$y^2=x$上的动点$M(x_0, y_0)$，过M分别作两条直线交抛物线于P、Q两点，交直线$x=t$于A、B两点．

（1）若点M纵坐标为$\sqrt{2}$，求M与焦点的距离；

（2）若$t=-1$，$P(1,1)$，$Q(1,-1)$，求证：$y_A\cdot y_B$为常数；

（3）是否存在t，使得$y_A\cdot y_B=1$且$y_P\cdot y_Q$为常数？若存在，求出t的所有可能值，若不存在，请说明理由．

21．（18 分）已知非空集合$A\subseteq R$，函数$y=f(x)$的定义域为D，若对任意$t\in A$且$x\in D$，不等式$f(x)\leqslant f(x+t)$恒成立，则称函数$f(x)$具有A性质．

（1）当$A=\{-1\}$，判断$f(x)=-x$、$g(x)=2x$是否具有A性质；

（2）当$A=(0,1)$，$f(x)=x+\frac{1}{x}$，$x\in[a, +\infty)$，若$f(x)$具有A性质，求a的取值范围；

（3）当$A=\{-2, m\}$，$m\in Z$，若D为整数集且具有A性质的函数均为常值函数，求所有符合条件的m的值．

2020年上海市春季高考数学试卷

参考答案与试题解析

一、填空题（本大题共12题，满分54分，第1~6题每题4分，第7-12题每题5分）

1．集合 $A=\{1，3\}$，$B=\{1，2，a\}$，若 $A\subseteq B$，则 $a=$__3__．

【思路分析】利用集合的包含关系即可求出 a 的值．

【解析】：$\because 3\in A$，且 $A\subseteq B$，$\therefore 3\in B$，$\therefore a=3$，故答案为：3．

【总结与归纳】本题主要考查了集合的包含关系，是基础题．

2．不等式 $\frac{1}{x}>3$ 的解集为__$(0,\frac{1}{3})$__．

【思路分析】将不等式化简后转化为一元二次不等式，由一元二次不等式的解法求出不等式的解集．

【解析】：由 $\frac{1}{x}>3$ 得 $\frac{1-3x}{x}>0$，则 $x(1-3x)>0$，即 $x(3x-1)<0$，解得 $0<x<\frac{1}{3}$，

所以不等式的解集是 $(0,\frac{1}{3})$，故答案为：$(0,\frac{1}{3})$．

【总结与归纳】本题考查分式不等式、一元二次不等式的解法，以及转化思想，属于基础题．

3．函数 $y=\tan 2x$ 的最小正周期为__$\frac{\pi}{2}$__．

【思路分析】根据函数 $y=\tan\omega x$ 的周期为 $\frac{\pi}{\omega}$，求出函数 $y=\tan 2x$ 的最小正周期．

【解析】：函数 $y=\tan 2x$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，故答案为：$\frac{\pi}{2}$．

【总结与归纳】本题主要考查正切函数的周期性和求法，属于基础题．

4．已知复数 z 满足 $z+2\overline{z}=6+i$，则 z 的实部为__2__．

【思路分析】设 $z=a+bi$，$(a,b\in R)$．根据复数 z 满足 $z+2\overline{z}=6+i$，利用复数的运算法则、复数相等即可得出．

【解析】：设 $z=a+bi$，$(a,b\in R)$．$\because$ 复数 z 满足 $z+2\overline{z}=6+i$，$\therefore 3a-bi=6+i$，

可得：$3a=6$，$-b=1$，解得 $a=2$，$b=1$．则 z 的实部为2．故答案为：2．

【总结与归纳】本题考查了复数的运算法则、复数相等，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

5．已知 $3\sin 2x=2\sin x$，$x\in(0,\pi)$，则 $x=$__$\arccos\frac{1}{3}$__．

【思路分析】根据三角函数的倍角公式，结合反三角公式即可得到结论．

【解析】：$\because 3\sin 2x=2\sin x$，$6\sin x\cos x=2\sin x$，

$\because x\in(0,\pi)$，$\therefore \sin x\neq 0$，$\therefore \cos x=\frac{1}{3}$，故 $x=\arccos\frac{1}{3}$．故答案为：$\arccos\frac{1}{3}$．

【总结与归纳】本题主要考查函数值的计算，利用三角函数的倍角公式是解决本题的关键．

6．若函数 $y=a\cdot 3^{x}+\frac{1}{3^{x}}$ 为偶函数，则 $a=$__1__．

【思路分析】根据题意，由函数奇偶性的定义可得 $a\cdot 3^{(-x)}+\frac{1}{3^{(-x)}}=a\cdot 3^{x}+\frac{1}{3^{x}}$，变形分析可得答案．

【解析】：根据题意，函数 $f(x)=a\cdot 3^{x}+\frac{1}{3^{x}}$ 为偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，

即 $a\cdot 3^{(-x)}+\frac{1}{3^{(-x)}}=a\cdot 3^{x}+\frac{1}{3^{x}}$，变形可得：$a(3^{x}-3^{-x})=(3^{x}-3^{-x})$，必有 $a=1$；故答案为：1．

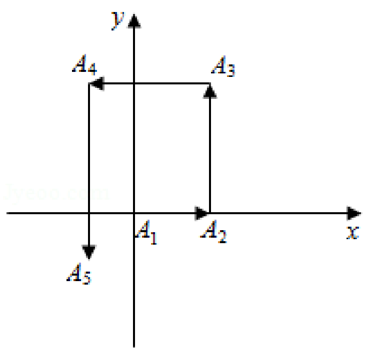
【总结与归纳】本题考查函数的奇偶性的性质以及应用，关键是掌握函数奇偶性的定义，属于基础题．

7．已知直线 $l_1:x+ay=1$，$l_2:ax+y=1$，若 $l_1\ /\!/\ l_2$，则 l_1 与 l_2 的距离为__$\sqrt{2}$__．

【思路分析】由 $l_1\ /\!/\ l_2$ 求得 a 的值，再根据两平行线间的距离计算即可．

【解析】：直线 $l_1:x+ay=1$，$l_2:ax+y=1$，

当$l_1 // l_2$时，$a^2-1=0$，解得$a=\pm 1$；
当$a=1$时l_1与l_2重合，不满足题意；
当$a=-1$时$l_1 // l_2$，此时$l_1: x-y-1=0$，$l_2: x-y+1=0$；
则l_1与l_2的距离为$d=\dfrac{|-1-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$．故答案为：$\sqrt{2}$．
【总结与归纳】本题考查了平行线的定义和平行线间的距离计算问题，是基础题．
8．已知二项式$(2x+\sqrt{x})^5$，则展开式中x^3的系数为__10__．
【思路分析】由二项展开式的通项，可得到答案．
【解析】：$\because T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}(\sqrt{x})^r=C_5^r 2^{5-r}x^{5-\frac{r}{2}}$，令$5-\dfrac{r}{2}=3$，$\therefore r=4$，代入通项得$C_5^4 2x^3=10x^3$，所以展开式中$x^3$的系数为$10$．故答案为：$10$．
【总结与归纳】本题考查利用二项式定理求特定项的系数，属于基础题．
9．三角形ABC中，D是BC中点，$AB=2$，$BC=3$，$AC=4$，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=$__$\dfrac{19}{4}$__．
【思路分析】根据余弦定理即可求出$\cos\angle BAC=\dfrac{11}{16}$，并得出$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}$，然后进行数量积的运算即可．
【解析】：$\because$在ΔABC中，$AB=2$，$BC=3$，$AC=4$，
$\therefore$由余弦定理得，$\cos\angle BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{4+16-9}{2\times 2\times 4}=\dfrac{11}{16}$，
$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times 4\times\dfrac{11}{16}=\dfrac{11}{2}$，且$D$是$BC$的中点，
$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{2}\times(4+\dfrac{11}{2})=\dfrac{19}{4}$．故答案为：$\dfrac{19}{4}$．
【总结与归纳】本题考查了余弦定理，向量加法的平行四边形法则，向量数乘的几何意义，向量数量积的运算及计算公式，考查了计算能力，属于基础题．
10．已知$A=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$，$a$、$b\in A$，则$|a|<|b|$的情况有__18__种．
【思路分析】先分类讨论a的取值，得到对应b的值，再整体求和即可．
【解析】：当$a=-3$，有0种，当$a=-2$，有2种，当$a=-1$，有4种；
当$a=0$，有6种，当$a=1$，有4种；当$a=2$，有2种，当$a=3$，有0种，
故共有：$2+4+6+4+2=18$．故答案为：18．
【总结与归纳】本题主要考查分类讨论思想在概率中的应用，属于基础题目．
11．已知A_1、A_2、A_3、A_4、A_5五个点，满足$\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\cdot\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}=0(n=1,2,3)$，$|\overrightarrow{A_nA_{n+1}}|\cdot|\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}|=n+1(n=1,2,3)$，则$|\overrightarrow{A_1A_5}|$的最小值为__$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$__．
【思路分析】可设$|\overrightarrow{A_1A_2}|=x$，从而据题意可得出$|\overrightarrow{A_2A_3}|=\dfrac{2}{x}$，$|\overrightarrow{A_3A_4}|=\dfrac{3x}{2}$，$|\overrightarrow{A_4A_5}|=\dfrac{8}{3x}$，并设$A_1(0,0)$，因为是求$|\overrightarrow{A_1A_5}|$的最小值，从而可得出$A_5(-\dfrac{x}{2},-\dfrac{2}{3x})$，从而可求出$|\overrightarrow{A_1A_5}|^2=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{4}{9x^2}$，从而根据基本不等式即可求出$|\overrightarrow{A_1A_5}|$的最小值．
【解析】：设$|\overrightarrow{A_1A_2}|=x$，则$|\overrightarrow{A_2A_3}|=\dfrac{2}{x}$，$|\overrightarrow{A_3A_4}|=\dfrac{3x}{2}$，$|\overrightarrow{A_4A_5}|=\dfrac{8}{3x}$，
设$A_1(0,0)$，如图，
$\because$求$|\overrightarrow{A_1A_5}|$的最小值，则：
$A_2(x,0)$，$A_3(x,\dfrac{2}{x})$，$A_4(-\dfrac{x}{2},\dfrac{2}{x})$，$A_5(-\dfrac{x}{2},-\dfrac{2}{3x})$，
$\therefore |\overrightarrow{A_1A_5}|^2=(-\dfrac{x}{2})^2+(-\dfrac{2}{3x})^2=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{4}{9x^2}..\dfrac{2}{3}$，当且仅当$\dfrac{x^2}{4}=\dfrac{4}{9x^2}$，



即$x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$时取等

号，

$\therefore|\overrightarrow{A_1A_5}|$的最小值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$．故答案为：$\frac{\sqrt{6}}{3}$．

【总结与归纳】本题考查了向量垂直的充要条件，利用向量坐标解决向量问题的方法，基本不等式求最值的方法，考查了计算能力，属于中档题．

12．已知 $f(x)=\sqrt{x-1}$，其反函数为 $f^{-1}(x)$，若 $f^{-1}(x)-a=f(x+a)$ 有实数根，则 a 的取值范围为__$[\frac{3}{4},+\infty)$__．

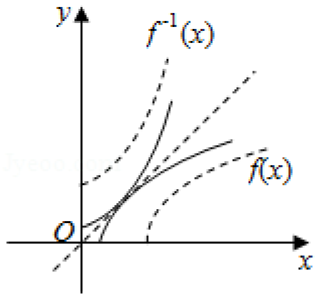
【思路分析】因为 $y=f^{-1}(x)-a$ 与 $y=f(x+a)$ 互为反函数，又 $f^{-1}(x)-a=f(x+a)$ 有实数根 $\Rightarrow y=f(x+a)$ 与 $y=x$ 有交点 $\Rightarrow$ 方程 $\sqrt{x+a-1}=x$ 有根．进而得出答案．

【解析】：因为 $y=f^{-1}(x)-a$ 与 $y=f(x+a)$ 互为反函数，

又方程 $f^{-1}(x)-a=f(x+a)$ 有实数根，

则函数 $y=f(x+a)$ 的图象与直线 $y=x$ 有交点，

所以 $\sqrt{x+a-1}=x$ 有根，即 $a=x^2-x+1=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，故答案为：$[\frac{3}{4}$，$+\infty)$．



【总结与归纳】本题主要考查函数的性质，函数与方程的关系，属于中档题．

二、选择题（本大题共 4 题，每题 5 分，共 20 分）

13．计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+5^n}{3^{n-1}+5^{n-1}}=($　　$)$

A．3　　B．$\frac{5}{3}$　　C．$\frac{3}{5}$　　D．5

【思路分析】把 $\frac{3^n+5^n}{3^{n-1}+5^{n-1}}$ 分子分母同时除以 5^{n-1}，则答案可求．

【解析】：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+5^n}{3^{n-1}+5^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(\frac{3}{5})^{n-1}+5}{(\frac{3}{5})^{n-1}+1}=5$．故选：$D$．

【总结与归纳】本题考查数列极限的求法，是基础的计算题．

14．“$\alpha=\beta$”是“$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$”的($\quad$)

A．充分非必要条件　　B．必要非充分条件

C．充要条件　　D．既非充分又非必要条件

【思路分析】容易看出，由 $\alpha=\beta$ 可得出 $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$，而反之显然不成立，从而可得出“$\alpha=\beta$”是“$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$”的充分不必要条件．

【解析】：(1) 若 $\alpha=\beta$，则 $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

$\therefore$“$\alpha=\beta$“是“$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$“的充分条件；

(2) 若 $\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$，则 $\sin^2\alpha=\sin^2\beta$，得不出 $\alpha=\beta$，

$\therefore$“$\alpha=\beta$”不是“$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$”的必要条件，

$\therefore$“$\alpha=\beta$”是“$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$”的充分非必要条件．故选：$A$．

【总结与归纳】本题考查了充分条件、必要条件和充分不必要条件的定义，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，正弦函数的图象，考查了推理能力，属于基础题．

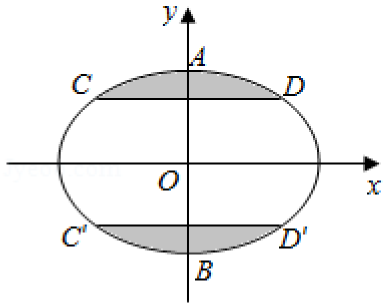
15．已知椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，作垂直于x轴的垂线交椭圆于A、B两点，作垂直于y轴的垂线交椭圆于C、D两点，且$AB=CD$，两垂线相交于点P，则点P的轨迹是(　　)

A．椭圆　　　　B．双曲线　　　　C．圆　　　　D．抛物线

【思路分析】利用已知条件判断轨迹是双曲线，或利用求解轨迹方程，推出结果即可．

【解析】：$\because AB\leqslant 2$，$\therefore CD\leqslant 2$，判断轨迹为上下两部分，即选双曲线；

设$A(m,t)$，$D(t,n)$，所以$P(m,n)$，因为$\dfrac{m^2}{2}+t^2=1$，$\dfrac{t^2}{2}+n^2=1$，消去t可得：$2n^2-\dfrac{m^2}{2}=1$，故选：B．



【总结与归纳】本题考查轨迹方程的求法与判断，是基本知识的考查，基础题．

16．数列$\{a_n\}$各项均为实数，对任意$n\in N^*$满足$a_{n+3}=a_n$，且行列式$\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{vmatrix}=c$为定值，则下列选项中不可能的是(　　)

A．$a_1=1$，$c=1$　　B．$a_1=2$，$c=2$　　C．$a_1=-1$，$c=4$　　D．$a_1=2$，$c=0$

【思路分析】化简行列式，由已知条件，作差化简得．

【解析】：行列式$\begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} \\ a_{n+2} & a_{n+3} \end{vmatrix}=a_na_{n+3}-a_{n+1}a_{n+2}=c$，

$\because$对任意$n\in N^*$满足$a_{n+3}=a_n$，

$\therefore \begin{cases} a_n^2-a_{n+1}a_{n+2}=c \\ a_{n+1}^2-a_{n+2}a_{n+3}=c \end{cases}$，作差整理得：$a_{n+1}=a_n$（常数列，$c=0$），或$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=0$，

当$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=0$，则$a_{n+1}+a_{n+2}=-a_n$及$a_{n+1}a_{n+2}=a_n^2-c$，

$\therefore$方程$x^2+a_nx+a_n^2-c=0$ 有两根a_{n+1}，a_{n+2}，

$\therefore \Delta=a_n^2-4(a_n^2-c)=4c-3a_n^2>0$，因为$B$错，故选：$B$．

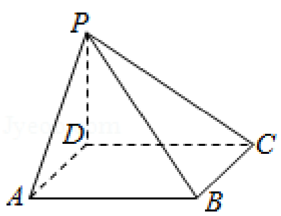
【总结与归纳】本题考查行列式，以及方程求解，属于中档题．

三、解答题（本大题共5题，共14+14+14+16+18=76分）

17．(14分）已知四棱锥$P-ABCD$，底面$ABCD$为正方形，边长为3，$PD\perp$平面$ABCD$．

(1）若$PC=5$，求四棱锥$P-ABCD$的体积；

(2）若直线AD与BP的夹角为60°，求PD的长．



【思路分析】(1）利用已知条件求出，棱锥的高，然后求解棱锥的体积即可．

(2）由已知中四棱锥$P-ABCD$的底面是边长为3的正方形，$PD\perp$平面$ABCD$．异面直线AD与PB所成角为60°，可得$\angle PBC=60^\circ$，且ΔPBC为直角三角形，$BC=3$，代入求出PC后，解直角ΔPDC可得答案．

【解析】：(1）$\because PD\perp$平面$ABCD$，$\therefore PD\perp DC$．

$\because CD=3$，$\therefore PC=5$，$\therefore PD=4$，$\therefore V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times 3^2\times 4=12$，

所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 12．

（2）$\because ABCD$ 是正方形，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore BC\perp PD$，$BC\perp CD$

又 $\because PD\cap CD=D$ $\therefore BC\perp$ 平面 PCD $\therefore BC\perp PC$

$\because$ 异面直线 AD 与 PB 所成角为 60°，$BC//AD$

$\therefore \angle PBC$ 为异面直线 AD 与 PB 所成的角

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\Delta \mathrm{PBC}$ 中，$\angle PBC=60^{\circ}$，$BC=3$ 故 $PC=3\sqrt{3}$

在 $\mathrm{Rt}\Delta \mathrm{PDC}$ 中，又 $CD=3$ $\therefore PD=3\sqrt{2}$

【总结与归纳】本题考查几何体的体积，空间点线面的距离的求法，考查转化思想以及空间想象能力，计算能力，是中档题．

18．（14 分）已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$，其前 n 项和为 S_n，$a_1=1$．

（1）若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$S_{10}=70$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_4=\dfrac{1}{8}$，求满足 $S_n>100a_n$ 时 n 的最小值．

【思路分析】(1) 设等差数列的公差为 d，运用等差数列的求和公式，解方程可得 d，进而得到所求通项公式；

(2) 设等比数列的公比为 q，由等比数列的通项公式可得 q，再由等比数列的求和公式，解不等式可得 n 的最小值．

【解析】:（1）数列 $\{a_n\}$ 为公差为 d 的等差数列，$S_{10}=70$，$a_1=1$，

可得 $10+\dfrac{1}{2}\times10\times9d=70$，解得 $d=\dfrac{4}{3}$，则 $a_n=1+\dfrac{4}{3}(n-1)=\dfrac{4}{3}n-\dfrac{1}{3}$；

（2）数列 $\{a_n\}$ 为公比为 q 的等比数列，$a_4=\dfrac{1}{8}$，$a_1=1$，

可得 $q^3=\dfrac{1}{8}$，即 $q=\dfrac{1}{2}$，则 $a_n=(\dfrac{1}{2})^{n-1}$，$S_n=\dfrac{1-(\dfrac{1}{2})^n}{1-\dfrac{1}{2}}=2-(\dfrac{1}{2})^{n-1}$，

$S_n>100a_n$，即为 $2-(\dfrac{1}{2})^{n-1}>100\cdot(\dfrac{1}{2})^{n-1}$，即 $2^n>101$，可得 $n..7$，即 n 的最小值为 7．

【总结与归纳】本题考查等差数列和等比数列的通项公式和求和公式的运用，考查方程思想和运算能力，属于基础题．

19．（14 分）有一条长为 120 米的步行道 OA，A 是垃圾投放点 ω_1，若以 O 为原点，OA 为 x 轴正半轴建立直角坐标系，设点 $B(x,0)$，现要建设另一座垃圾投放点 $\omega_2(t,0)$，函数 $f_t(x)$ 表示与 B 点距离最近的垃圾投放点的距离．

（1）若 $t=60$，求 $f_{60}(10)$、$f_{60}(80)$、$f_{60}(95)$ 的值，并写出 $f_{60}(x)$ 的函数解析式；

(2) 若可以通过 $f_t(x)$ 与坐标轴围成的面积来测算扔垃圾的便利程度，面积越小越便利．问：垃圾投放点 ω_2 建在何处才能比建在中点时更加便利?

【思路分析】(1) 利用题目所给定义表示出 $f_{60}(x)=\{|60-x|，|120-x|\}_{min}$，分类讨论可得 $f_{60}(x)$；

(2) 利用题意可得 $f_t(x)=\begin{cases}|t-x|,x,,\ 0.5(120+t)\\|120-x|,x>0.5(120+t)\end{cases}$，表示出 $f_t(x)$ 与坐标轴围成的面积，进而表示出面积不等式，解出不等式即可

【解析】:（1）投放点 $\omega_1(120,0)$，$\omega_2(60,0)$，$f_{60}(10)$ 表示与 $B(10,0)$ 距离最近的投放点（即 ω_2）的距离，所以 $f_{60}(10)=|60-10|=50$，同理分析，$f_{60}(80)=|60-80|=20$，$f_{60}(95)=|120-95|=25$，

由题意得，$f_{60}(x)=\{|60-x|，|120-x|\}_{min}$，

则当 $|60-x|,,|120-x|$，即 $x,,90$ 时，$f_{60}(x)=|60-x|$；

当 $|60-x|>|120-x|$，即 $x>90$ 时，$f_{60}(x)=|120-x|$；

综上 $f_{60}(x)=\begin{cases}|60-x|,x,,\ 90\\|120-x|,x>90\end{cases}$；

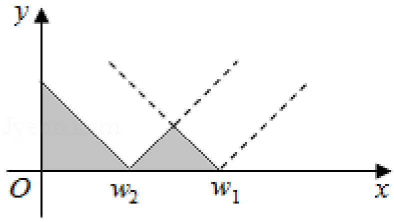
（2）由题意得 $f_t(x)=\{|t-x|，|120-x|\}_{min}$，

所以 $f_t(x)=\begin{cases}|t-x|,x\leqslant 0.5(120+t)\\|120-x|,x>0.5(120+t)\end{cases}$，则 $f_t(x)$ 与坐标轴围成的面积如阴影部分所示，

所以 $S=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}(120-t)^2=\frac{3}{4}t^2-60t+3600$，

由题意，$S<S(60)$，即 $\frac{3}{4}t^2-60t+3600<2700$，

解得 $20<t<60$，即垃圾投放点 ω_2 建在 $(20,0)$ 与 $(60,0)$ 之间时，比建在中点时更加便利．



【总结与归纳】本题是新定义问题，考查对题目意思的理解，分类讨论是关键，属于中档题．

20．(16分) 已知抛物线 $y^2=x$ 上的动点 $M(x_0,\ y_0)$，过 M 分别作两条直线交抛物线于 P、Q 两点，交直线 $x=t$ 于 A、B 两点．

(1) 若点 M 纵坐标为 $\sqrt{2}$，求 M 与焦点的距离；

(2) 若 $t=-1$，$P(1,1)$，$Q(1,-1)$，求证：$y_A\cdot y_B$ 为常数；

(3) 是否存在 t，使得 $y_A\cdot y_B=1$ 且 $y_P\cdot y_Q$ 为常数？若存在，求出 t 的所有可能值，若不存在，请说明理由．

【思路分析】(1) 点 M 的横坐标 $x_M=(\sqrt{2})^2=2$，由 $y^2=x$，得 $p=\frac{1}{2}$，由此能求出 M 与焦点的距离．

(2) 设 $M(y_0^{\ 2},y_0)$，直线 $PM:y-1=\frac{y_0-1}{y_0^{\ 2}-1}(x-1)$，当 $x=-1$ 时，$y_A=\frac{y_0-1}{y_0+1}$，同理求出 $y_B=\frac{-y_0-1}{y_0-1}$，由此能证明 $y_A\cdot y_B$ 为常数．

(3) 解设 $M(y_0^{\ 2},y_0)$，$A(t,y_A)$，直线 $MA:y-y_0=\frac{y_0-y_A}{y_0^{\ 2}-t}(x-y_0^2)$，联立 $y^2=x$，得 $y^2-\frac{y_0^{\ 2}-t}{y_0-y_A}y+\frac{y_0^{\ 2}-t}{y_0-y_A}y_0-y_0^{\ 2}=0$，求出 $y_P=\frac{y_0y_A-t}{y_0-y_A}$，同理得 $y_Q=\frac{y_0y_B-t}{y_0-y_B}$，由此能求出存在 $t=1$，使得 $y_A\cdot y_B=1$ 且 $y_P\cdot y_Q$ 为常数1．

【解析】：(1) 解：$\because$ 抛物线 $y^2=x$ 上的动点 $M(x_0,\ y_0)$，

过 M 分别作两条直线交抛物线于 P、Q 两点，交直线 $x=t$ 于 A、B 两点．

$\because$ 点 M 纵坐标为 $\sqrt{2}$，

$\therefore$ 点 M 的横坐标 $x_M=(\sqrt{2})^2=2$，

$\because y^2=x$，$\therefore p=\frac{1}{2}$，

$\therefore M$ 与焦点的距离为 $MF=x_M+\frac{p}{2}=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$．

(2) 证明：设 $M(y_0^{\ 2},y_0)$，直线 $PM:y-1=\frac{y_0-1}{y_0^{\ 2}-1}(x-1)$，

当 $x=-1$ 时，$y_A=\frac{y_0-1}{y_0+1}$，

直线 $QM:y+1=\frac{y_0+1}{y_0^{\ 2}-1}(x-1)$，$x=-1$ 时，$y_B=\frac{-y_0-1}{y_0-1}$，$\therefore y_Ay_B=-1$，

$\therefore y_A\cdot y_B$ 为常数 -1．

(3) 解：设 $M(y_0^{\ 2},y_0)$，$A(t,y_A)$，直线 $MA:y-y_0=\frac{y_0-y_A}{y_0^{\ 2}-t}(x-y_0^2)$，

联立 $y^2=x$，得 $y^2-\frac{y_0^{\ 2}-t}{y_0-y_A}y+\frac{y_0^{\ 2}-t}{y_0-y_A}y_0-y_0^{\ 2}=0$，

$\therefore y_0+y_p=\dfrac{{y_0}^2-t}{y_0-y_A}$，即 $y_P=\dfrac{y_0y_A-t}{y_0-y_A}$，

同理得 $y_Q=\dfrac{y_0y_B-t}{y_0-y_B}$，

$\because y_A\cdot y_B=1$，

$\therefore y_Py_Q=\dfrac{{y_0}^2-ty_0(y_A+y_B)+t^2}{{y_0}^2-y_0(y_A+y_B)+1}$，

要使 y_Py_Q 为常数，即 $t=1$，此时 y_Py_Q 为常数 1，

$\therefore$ 存在 $t=1$，使得 $y_A\cdot y_B=1$ 且 $y_P\cdot y_Q$ 为常数 1．

【总结与归纳】本题考查点到焦点的距离的求法，考查两点纵坐标乘积为常数的证明，考查满足两点纵坐标乘积为常数的实数值是否存在的判断与求法，考查抛物线、直线方程等基础知识，考查运算求解能力，是中档题．

21．（18 分）已知非空集合 $A\subseteq R$，函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若对任意 $t\in A$ 且 $x\in D$，不等式 $f(x)\leqslant f(x+t)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 具有 A 性质．

（1）当 $A=\{-1\}$，判断 $f(x)=-x$、$g(x)=2x$ 是否具有 A 性质；

（2）当 $A=(0,1)$，$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$，$x\in[a，+\infty)$，若 $f(x)$ 具有 A 性质，求 a 的取值范围；

（3）当 $A=\{-2，m\}$，$m\in Z$，若 D 为整数集且具有 A 性质的函数均为常值函数，求所有符合条件的 m 的值．

【思路分析】(1）利用函数的单调性结合新定义，逐个判断即可；

（2）依题意，$f(x)=x+\dfrac{1}{x}(x\geqslant a)$ 为增函数，由双勾函数的图象及性质即得解；

（3）由题意，$f(2k)=p(k\in Z)$，$f(2n-1)=q(n\in Z)$，又为常值函数，故 $f(2k)=f(2n-1)$，由此即可得解．

【解析】:（1）$\because f(x)=-x$ 为减函数，$\therefore f(x)<f(x-1)$，$\therefore f(x)=-x$ 具有 A 性质；

$\because g(x)=2x$ 为增函数，$\therefore g(x)>g(x-1)$，$\therefore g(x)=2x$ 不具有 A 性质；

（2）依题意，对任意 $t\in(0,1)$，$f(x)\leqslant f(x+t)$ 恒成立，

$\therefore f(x)=x+\dfrac{1}{x}(x\geqslant a)$ 为增函数（不可能为常值函数），

由双勾函数的图象及性质可得 $a\geqslant 1$（因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上是增函数）

当 $a\geqslant 1$ 时，函数单调递增，满足对任意 $t\in(0,1)$，$f(x)\leqslant f(x+t)$ 恒成立，

综上，实数 a 的取值范围为 $[1，+\infty)$．

（3）$\because D$ 为整数集，具有 A 性质的函数均为常值函数，

$\therefore$ 当 $t=-2$，$f(x)=f(x-2)$ 恒成立，周期为 2，

设 $f(2k)=p(k\in Z)$，$f(2n-1)=q(n\in Z)$，

由题意，$p=q$，则 $f(2k)=f(2n-1)$，

当 $x=2k$，$f(x)=f(x+2n-2k-1)$，$\therefore m=2n-2k-1(n,k\in Z)$，

当 $x=2n-1$，$f(x)=f(x+2k-2n+1)$，$\therefore m=2k-2n+1(n,k\in Z)$，

综上，m 为奇数．

【总结与归纳】本题以新定义为载体，考查抽象函数的性质及其运用，考查逻辑推理能力及灵活运用知识的能力，属于中档题．