2021年上海春季高考数学试题（网络收集版）

一、填空题

1．等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=3,d=2$，则$a_{10}=$______.

2．已知复数z满足$z=1-3i$(i是虚数单位)，则$|\overline{z}-i|=$______.

3．不等式$\dfrac{2x+5}{x-2}<1$的解集为______.

4．已知圆柱的底面半径为1，母线长为2，则其侧面积为______________.

5．求直线$x=-2$与直线$\sqrt{3}x-y+1=0$的夹角为________.

6．方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$无解，求$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=$______.

7．$(x+1)^n$的二项展开式中有且仅有x^3的系数为最大值，则x^3的系数为______.

8．已知函数$f(x)=3^x+\dfrac{a}{3^x+1}(a>0)$的最小值为5，则$a=$______.

9．在无穷等比数列$\{a_n\}$中，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1-a_n)=4$，则$a_2$的取值范围是________

10．某人某天需要运动总时长大于等于60分钟，现有五项运动可以选择，如下表所示，问有几种运动方式组合________

A运动	B运动	C运动	D运动	E运动
7点−8点	8点−9点	9点−10点	10点−11点	11点−12点
30分钟	20分钟	40分钟	30分钟	30分钟

11．已知椭圆$x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$0<b<1$）的左、右焦点为F_1、F_2，以O为顶点，F_2为焦点作抛物线交椭圆于P，且$\angle PF_1F_2=45°$，则抛物线的准线方程是________

12．已知$\theta>0$，对任意$n\in\mathbf{N}^*$，总存在实数φ，使得$\cos(n\theta+\varphi)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则$\theta$的最小值是___

二、单选题

13．下列函数中，在定义域内存在反函数的是（　）

A．x^2　　B．$\sin x$　　C．2^x　　D．$y=1$

14．已知集合$A=\{x|x^2-x-2\geq0\}$，$B=\{x|x>-1\}$，则（　）

A．$A\subseteq B$　　B．$\complement_R A\subseteq\complement_R B$　　C．$A\cap B=\phi$　　D．$A\cup B=R$

15．已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，下列是 $f(x)$ 无最大值的充分条件是（　）

A．$f(x)$ 为偶函数且关于直线 $x=1$ 对称　B．$f(x)$ 为偶函数且关于点 $(1,1)$ 对称

C．$f(x)$ 为奇函数且关于直线 $x=1$ 对称　D．$f(x)$ 为奇函数且关于点 $(1,1)$ 对称

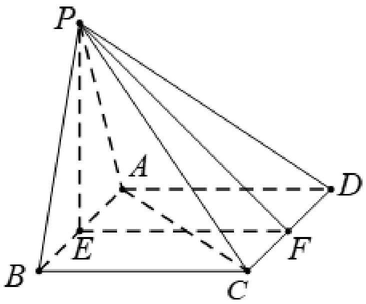
16．在△ABC 中，D 为 BC 中点，E 为 AD 中点，则以下结论：① 存在△ABC，使得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=0$；② 存在三角形△$ABC$，使得 $\overrightarrow{CE}\,//\,(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$，则 （　）

A．①成立，②成立　　B．①成立，②不成立

C．①不成立，②成立　　D．①不成立，②不成立

三、解答题

17．四棱锥 $P-ABCD$，底面为正方形 $ABCD$，边长为4，E 为 AB 中点，$PE\perp$ 平面 $ABCD$.



（1）若△PAB 为等边三角形，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积；

（2）若 CD 的中点为 F，PF 与平面 $ABCD$ 所成角为45°，求 PD 与 AC 所成角的大小.

18．已知 A、B、C 为△ABC 的三个内角，a、b、c 是其三条边，$a=2,\cos C=-\dfrac{1}{4}$.

(1)若 $\sin A=2\sin B$，求 b、c；

(2)若 $\cos(A-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{4}{5}$，求 c.

19．（1）团队在 O 点西侧、东侧 20 千米处设有 A、B 两站点，测量距离发现一点 P 满足 $|PA|-|PB|=20$ 千米，可知 P 在 A、B 为焦点的双曲线上，以 O 点为原点，东侧为 x 轴正半轴，北侧为 y 轴正半轴，建立平面直角坐标系，P 在北偏东 60°处，求双曲线标准方程和 P 点坐标.

（2）团队又在南侧、北侧 15 千米处设有 C、D 两站点，测量距离发现 $|QA|-|QB|=30$ 千米，$|QC|-|QD|=10$ 千米，求 $|OQ|$（精确到 1 米）和 Q 点位置（精确到 1 米，1°）

20．已知函数 $f(x)=\sqrt{|x+a|-a}-x$.

（1）若 $a=1$，求函数的定义域；

（2）若 $a\neq 0$，若 $f(ax)=a$ 有 2 个不同实数根，求 a 的取值范围；

（3）是否存在实数 a，使得函数 $f(x)$ 在定义域内具有单调性？若存在，求出 a 的取值范围.

21．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n\geq 0$，对任意 $n\geq 2$，a_n 和 a_{n+1} 中存在一项使其为另一项与 a_{n-1} 的等差中项

（1）已知 $a_1=5$，$a_2=3$，$a_4=2$，求 a_3 的所有可能取值；

（2）已知$a_1=a_4=a_7=0$，a_2、a_5、a_8为正数，求证：a_2、a_5、a_8成等比数列，并求出公比q；

（3）已知数列中恰有 3 项为 0，即$a_r=a_s=a_t=0$，$2<r<s<t$，且$a_1=1$，$a_2=2$，求$a_{r+1}+a_{s+1}+a_{t+1}$的最大值.

《2021年上海春季高考数学试题（网络收集版）》参考答案

题号	13	14	15	16						
答案	C	D	D	B						

1．21

【分析】直接代入等差数列的通项公式可得答案.

【详解】因为$a_1=3,d=2$， 所以$a_{10}=a_1+9d=21$.

故答案为：21.

2．$\sqrt{5}$

【分析】由已知求得$\overline{z}-i$，再由复数模的计算公式求解.

【详解】解：$\because z=1-3i$，

$\therefore \overline{z}-i=1+3i-i=1+2i$，

则$|\overline{z}-i|=|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

故答案为：$\sqrt{5}$.

3．$(-7,2)$

【分析】移项通分后转化为一元二次不等式求解.

【详解】$\dfrac{2x+5}{x-2}<1\Rightarrow\dfrac{2x+5}{x-2}-1<0\Rightarrow\dfrac{x+7}{x-2}<0\Rightarrow(x+7)(x-2)<0\Rightarrow-7<x<2$.

故答案为：$(-7,2)$.

4．4π

【分析】根据圆柱的侧面积公式，即可求得该圆柱的侧面积，得到答案.

【详解】由题意，圆柱的底面半径为1，母线长为2，

根据圆柱的侧面积公式，可得其侧面积为$S=2\pi rl=2\pi\times1\times2=4\pi$.

【点睛】本题主要考查了圆柱的侧面积公式的应用，其中解答中熟记圆柱的侧面积公式，准确计算是解答的关键，着重考查了运算与求解能力，属于基础题.

5．$\dfrac{\pi}{6}$

【分析】先求出直线的斜率，可得它们的倾斜角，从而求出两条直线的夹角.

【详解】解：$\because$直线$x=-2$的斜率不存在，倾斜角为$\dfrac{\pi}{2}$，

直线$\sqrt{3}x-y+1=0$的斜率为$\sqrt{3}$，倾斜角为$\dfrac{\pi}{3}$，

故直线$x=-2$与直线$\sqrt{3}x-y+1=0$的夹角为$\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$，

故答案为：$\dfrac{\pi}{6}$.

6．0

【分析】利用二元一次方程组的解的行列式表示进行分析即可得到答案．

【详解】解：对于方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$，有$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix},D_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\c_2 & b_2\end{vmatrix},D_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{vmatrix}$，

当$D\neq 0$时，方程组的解为$\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D}\\y=\dfrac{D_y}{D}\end{cases}$，

根据题意，方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$无解，

所以$D=0$，即$D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$，

故答案为：0．

7．20

【分析】根据已知条件求出n的值，利用二项式定理可求得x^3的系数．

【详解】因为$\left(x+1\right)^n$的二项展开式中有且仅有x^3的系数为最大值，则$n=6$，

故$\left(x+1\right)^6$的二项展开式的通项为$T_{r+1}=C_6^r\cdot x^{6-r}$，

由$6-\mathrm{r}=3$可得$r=3$，故x^3的系数为$C_6^3=20$．

故答案为：20．

8．9

【分析】配方得$f\left(x\right)=3^x+\dfrac{a}{3^x+1}\left(a>0\right)=3^x+1+\dfrac{a}{3^x+1}-1$，结合基本不等式即可求解

【详解】$f\left(x\right)=3^x+\dfrac{a}{3^x+1}\left(a>0\right)=3^x+1+\dfrac{a}{3^x+1}-1\geq 2\sqrt{a}-1=5\Rightarrow a=9$，当且仅当$x=\log_3 2$时等号满足，

故答案为：9

9．$(-4,0)\cup(0,4)$

【分析】由无穷等比数列的概念可得公比q的取值范围，再由极限的运算知$a_1=4$，从而得解．

【详解】解：$\because$无穷等比数列$\{a_n\}$，$\therefore$公比$q\in(-1，0)\cup(0，1)$，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(a_1-a_n)=a_1=4$，

$\therefore a_2=a_1q=4q\in(-4，0)\cup(0，4)$．

故答案为：$(-4，0)\cup(0，4)$．

10．23

【分析】根据题意，可以判定选择任意3种及其以上否是符合要求的，只是在选择两种的情况下，有些是达不到要求的，利用组合求得总数，减去不合要求的种数即可.

【详解】由题意，至少要选2种运动，并且选2种运动的情况中，AB、DB、EB的组

合是不符题意的，$\therefore C_5^5+C_5^4+C_5^3+C_5^2-3=23$，

故答案为：23.

11．$x=1-\sqrt{2}$

【分析】先设出椭圆的左右焦点坐标，进而可得抛物线的方程，设出直线PF_1的方程并与抛物线联立，求出点P的坐标，由此可得$PF_2\perp F_1F_2$，进而可以求出PF_1，PF_2的长度，再由椭圆的定义即可求解.

【详解】解：设$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，则抛物线$y^2=4cx$，

直线$PF_1: y=x+c$，联立方程组$\begin{cases} y^2=4cx \\ y=x+c \end{cases}$，解得$x=c$，$y=2c$，

所以点P的坐标为$(c,2c)$，所以$PF_2\perp F_1F_2$，又$PF_2=F_2F_1=2c$，所以$PF_1=2\sqrt{2}c$

所以$PF_1=2\sqrt{2}c$，所以$PF_1+PF_2=(2+2\sqrt{2})c=2a=2$，

则$c=\sqrt{2}-1$，

所以抛物线的准线方程为：$x=-c=1-\sqrt{2}$，

故答案为：$x=1-\sqrt{2}$.

12．$\dfrac{2\pi}{5}$

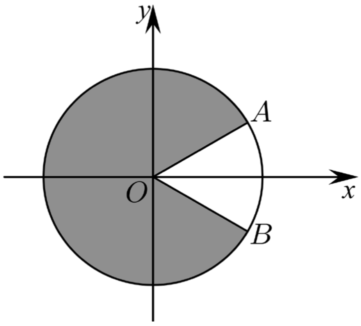
【分析】

利用单位圆中的终边位置研究，可知$\theta>\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，存在正整数$m$,使得$\dfrac{2m\pi}{\theta}\in\mathbf{N}^*$，由此求得$\theta$的最小值.

【详解】在单位圆中分析，由题意，

$n\theta+\varphi$的终边要落在图中阴影部分区域

（其中$\angle AOx=\angle BOx=\dfrac{\pi}{6}$），



必存在某个正整数n，使得$n\theta+\varphi$终边在OB的下面，而再加上θ，即跨越空白区域到达下一个周期内的阴影区

域内，

$\therefore \theta > \angle AOB = \frac{\pi}{3}$，

$\because$对任意 $n\in \mathbf{N}^*$ 要成立，所以必存在某个正整数 n，使得以后的各个角的终边与前面的重复（否则终边有无穷多，必有两个角的终边相差任意给定的角度比如 1°，进而对于更大的 n,次差的累积可以达到任意的整度数，便不可能在空白区域中不存在了），

故存在正整数 m ,使得 $\frac{2m\pi}{\theta}\in \mathbf{N}^*$，即 $\theta=\frac{2m\pi}{k}$， $k\in \mathbf{N}^*$，

同时 $\theta > \frac{\pi}{3}$，

$\therefore \theta$的最小值为$\frac{2\pi}{5}$,

故答案为： $\frac{2\pi}{5}$.

【点睛】

本题考查三角函数的性质，主要思想是在单位圆中利用数形结合思想进行研究分析.得出存在正整数 m ,使得 $\frac{2m\pi}{\theta}\in \mathbf{N}^*$，是关键.

13．C

【分析】根据反函数的定义判断.

【详解】在定义域内，

$y=x^2$中可能有两个不同的 x 对应同一个 y ，不存在反函数；

$y=\sin x$ 是周期函数，多个 x 对应同一个 y ，不存在反函数；

$y=2^x$ 对值域内每一个 y 值在定义域内都只有唯一的 x 与之对应，存在反函数，

$y=1$是所有 x 对应同一个 y ，它不存在反函数.

故选：C.

14．D

【分析】先求解集合 A 中不等式，计算$\complement_R A, \complement_R B$，依次判断即可

【详解】由题意， $A=\{x\mid x^2-x-2\geq 0\}=\{x\mid (x-2)(x+1)\geq 0\}=\{x\mid x\geq 2$ 或 $x\leq -1\}$

$$\therefore \complement_R A=\{x|-1<x<2\}$$

由$B=\{x|x>-1\}\ \therefore \complement_R B=\{x|x\leq -1\}$

$\therefore A,B$ 和$\complement_R A, \complement_R B$不存在包含关系， $A\cap B=\{x\mid x\geq 2\}, A\cup B=R$

故选：D

15．D

【分析】根据对称性可判断函数的周期，故可判断 ABC 的正误，根据对称性可得 $f\left(x+2\right)-f(x)=2$，据此可判断

D 的正误.

【详解】对于 A，因为 $f(x)$ 为偶函数，故 $f\left(-x\right)=f(x)$，

而 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，故 $f\left(2-x\right)=f(x)$，故 $f\left(2-x\right)=f(-x)$，

故 $f\left(x\right)$ 为周期函数且周期为 2，

而 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,2\right]$ 必有最大值，故 $f\left(x\right)$ 必有最大值，故 A 错误.

对于 B，而 $f(x)$ 的图像关于点 $(1,1)$ 对称，故 $f\left(2-x\right)+f(x)=2$，

故 $f\left(x-2\right)+f(x)=2$，故 $f\left(x+2\right)+f(x)=2$，故 $f\left(x+2\right)=f(x-2)$

故 $f\left(x\right)$ 为周期函数且周期为 4，

而 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,4\right]$ 必有最大值，故 $f\left(x\right)$ 必有最大值，故 B 错误.

对于 C，因为 $f(x)$ 为奇函数，故 $f\left(-x\right)=-f(x)$，

而 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，故 $f\left(2-x\right)=f(x)$，故 $f\left(x-2\right)=-f(x)$，

所以 $f\left(x+4\right)=f(x)$ 故 $f\left(x\right)$ 为周期函数且周期为 4，

而 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,4\right]$ 必有最大值，故 $f\left(x\right)$ 必有最大值，故 C 错误.

对于 D，因为 $f(x)$ 为奇函数，故 $f\left(-x\right)=-f(x)$，

而 $f(x)$ 的图像关于点 $(1,1)$ 对称，故 $f\left(2-x\right)+f(x)=2$，

故 $f(x)-f\left(x-2\right)=2$，设 $x=2n,n\in\mathrm{N}^*$，

则 $f(2n)=f\left(0\right)+2n$，故 $f\left(x\right)$ 无最大值，

故选：D

16．B

【分析】建立坐标系，设出坐标，利用坐标关系表示出即可判断.

【详解】不妨设 $A(2x,2y)$，$B(-1,0)$，$C(1,0)$，$D(0,0)$，$E(x,y)$，

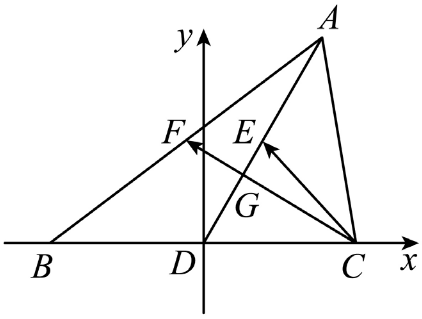
① $\overrightarrow{AB}=(-1-2x,-2y)$，$\overrightarrow{CE}=(x-1,y)$，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，$\therefore -(2x+1)(x-1)-2y^2=0$，

$\therefore -(2x+1)(x-1)=2y^2$，满足条件的 (x,y) 明显存在，∴①成立；

② F 为 AB 中点，$(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})=2\overrightarrow{CF}$，$CF$ 与 AD 交点即重心 G，

∵ G 为 AD 三等分点，E 为 AD 中点，∴ $\overrightarrow{CE}$ 与 $\overrightarrow{CG}$ 不共线，即②不成立；

故选：B



17．（1）$V_{P-ABCD}=\frac{32\sqrt{3}}{3}$；（2）$\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$.

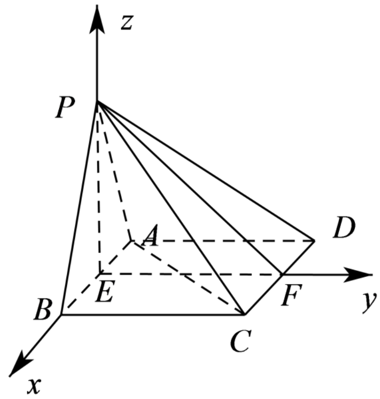
【分析】(1）由棱锥体积公式计算；

（2）建立空间直角坐标系，用空间向量法求二面角.

【详解】(1）∵正方形 $ABCD$ 边长为4，△ PAB 为等边三角形，E 为 AB 中点，

∴ $PE=2\sqrt{3}$，$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times 4^2\times 2\sqrt{3}=\frac{32\sqrt{3}}{3}$；

（2）如图以 EA,EF,EP 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，则 $P(0,0,4)$，$D(-2,4,0)$，$A(-2,0,0)$，



$C(2,4,0)$，∴$\overrightarrow{PD}=(-2,4,-4)$，$\overrightarrow{AC}=(4,4,0)$，

∴$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{PD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{-8+16+0}{6\times 4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$,

即 PD 与 AC 所成角的大小为 $\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$.

18．(1)1，$\sqrt{6}$；

(2)$\frac{5\sqrt{30}}{2}$.

【分析】(1)由已知利用正弦定理即可求解 b 的值；利用余弦定理即可求解 c 的值.

(2)根据已知利用两角差的余弦公式，同角三角函数基本关系式可求得 $\sin A$、$\sin C$ 的值，进而根据正弦定理可得 c 的值.

【详解】(1）∵ $\sin A=2\sin B$，由正弦定理得 $a=2b$，

又 $a=2$，可得 $b=1$，

由于 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{2^2+1^2-c^2}{2\times2\times1}=-\dfrac{1}{4}$，可得 $c=\sqrt{6}$．

（2）∵ $\cos C=-\dfrac{1}{4}$，$0<C<\pi$，

∴ $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$C>\dfrac{\pi}{2}>A$，

$C>A\Rightarrow c>a\Rightarrow \sin C>\sin A\Rightarrow \sin A<\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

∵ $\cos(A-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos A+\sin A)=\dfrac{4}{5}$，

∴ $\cos A+\sin A=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}$，

又 $\cos^2 A+\sin^2 A=1$，

可解得 $\sin A=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ 或 $\sin A=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ (舍)，

由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，可得 $c=\dfrac{5\sqrt{30}}{2}$．

19．（1）$\dfrac{x^2}{100}-\dfrac{y^2}{300}=1$，$P(\dfrac{15\sqrt{2}}{2},\dfrac{5\sqrt{6}}{2})$；（2）$OQ\approx19$，$Q$ 点位置北偏东 66°．

【分析】(1）求出 a，c，b 的值即可求得双曲线方程，求出直线 OP 的方程，与双曲线方程联立，即可求得 P 点坐标；

（2）分别求出以 A、B 为焦点，以 C，D 为焦点的双曲线方程，联立即可求得点 Q 的坐标，从而求得 $|OQ|$，及 Q 点位置.

【详解】(1）由题意可得 $a=10$，$c=20$，所以 $b^2=300$，

所以双曲线的标准方程为 $\dfrac{x^2}{100}-\dfrac{y^2}{300}=1\left(x>0\right)$，

直线 $OP: y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，联立双曲线方程，可得 $x=\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$，$y=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$，

即点 P 的坐标为 $(\dfrac{15\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{5\sqrt{6}}{2})$．

（2）①$|QA|-|QB|=30$，则 $a=15$，$c=20$，所以 $b^2=175$，

双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{225}-\dfrac{y^2}{175}=1\left(x>0\right)$；

②$|QC|-|QD|=10$，则 $a=5$，$c=15$，所以 $b^2=200$，

所以双曲线方程为 $\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{x^2}{200}=1\left(y>0\right)$，

两双曲线方程联立，得 $Q(\sqrt{\dfrac{14400}{47}}$，$\sqrt{\dfrac{2975}{47}})$，

所以 $|OQ|\approx19$ 千米，设 OQ 与 x 轴夹角为 θ，则 $\tan\theta=\sqrt{\dfrac{2975}{14400}}$，利用计算器求得 $\theta\approx24^\circ$，

∴ Q 点位置北偏东 66°．

20．（1）$x\in(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$；（2）$a\in(0,\dfrac{1}{4})$；（3）$\left(-\infty,-\dfrac{1}{4}\right]$.

【分析】(1) 解绝对值不等式 $|x+1|-1\geq 0$ 即可得答案；

(2) 利用 $f(ax)=a$ 有两个不同的实数根，转化为 $ax+a-a=\left(ax+a\right)^2$ 有两个根，利用换元法可求实数 a 的取值范围；

(3) 分 $x\geq -a$ 与 $x<-a$ 两类情况，结合复合函数的单调性可得使得函数 $f(x)$ 在定义域内具有单调性的 a 的取值范围.

【详解】解：(1) $f(x)=\sqrt{|x+1|-1}-x$，$\therefore |x+1|-1\geq 0$，解得 $x\in(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$；

所以函数的定义域为 $x\in(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$.

(2) 由题知 $f(ax)=\sqrt{|ax+a|-a}-ax=a$ 有 2 个不同实数根，

所以 $\sqrt{|ax+a|-a}=ax+a\geq 0$，$ax+a-a=\left(ax+a\right)^2$，

设 $ax+a=t\geq 0$，$\therefore \sqrt{t-a}=t$ 有 2 个不同实数根，

$\therefore$ 整理得 $a=t-t^2$，$t\geq 0$ 有 2 个不同实数根，同时 $a\neq 0$，

$\therefore a\in(0,\frac{1}{4})$；

(3) 当 $x\geq -a$，$f(x)=\sqrt{|x+a|-a}-x=\sqrt{x}-x=-(\sqrt{x}-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$，在 $[\frac{1}{4},+\infty)$ 递减，

此时需满足 $-a\geq\frac{1}{4}$，即 $a\leqslant -\frac{1}{4}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[-a,+\infty)$ 上递减；

当 $x<-a$，$f(x)=\sqrt{|x+a|-a}-x=\sqrt{-x-2a}-x$，在 $(-\infty,-2a]$ 上递减，

$\because a\leq -\frac{1}{4}<0$，

$\therefore -2a>-a>0$，即当 $a\leqslant -\frac{1}{4}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 上递减；

综上，当 $a\leqslant -\frac{1}{4}$ 时，函数 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上连续，且单调递减.

所以 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right]$

【点睛】本题第二问解题的关键在于利用换元法，将问题转化为 $a=t-t^2$，$t\geq 0$ 有 2 个不同实数根，进而求解，第三问解题的关键在于分类讨论求解.

21．(1) $a_3=1$；(2) 证明见解析，$\frac{1}{4}$；(3) $\frac{21}{64}$.

【分析】(1) 根据等差中项分别验证求解；

(2) 根据等差数列，分别计算 a_2,a_3,a_5,a_6,a_8，即可证明；

(3) 由 $2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$ 或 $2a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ 可知 $\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=1$ 或 $\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=-\frac{1}{2}$，结合 (2) 可求最大值.

【详解】(1) 由题意，$2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$ 或 $2a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，

$\therefore 2a_2=a_3+a_1\Rightarrow a_3=1$，此时 $a_2=3,a_3=1,a_4=2$，满足 $2a_4=a_3+a_2$

$2a_3=a_2+a_1\Rightarrow a_3=4$，此时 $a_2=3,a_3=4,a_4=2$，$2a_4\neq a_3+a_2$，$2a_3\neq a_4+a_2$

所以$a_3=1$

（2）$\because a_1=a_4=a_7=0$，$\therefore a_3=2a_2$，或$a_3=\frac{a_2}{2}$，经检验，$a_3=\frac{a_2}{2}$；

$\therefore a_5=\frac{a_3}{2}=\frac{a_2}{4}$，或$a_5=-a_3=-\frac{a_2}{2}$（舍），$\therefore a_5=\frac{a_2}{4}$；

$\therefore a_6=\frac{a_5}{2}=\frac{a_2}{8}$，或$a_6=-a_5=-\frac{a_2}{4}$（舍），$\therefore a_6=\frac{a_2}{8}$；

$\therefore a_8=\frac{a_6}{2}=\frac{a_2}{16}$，或$a_8=-a_6=-\frac{a_2}{8}$（舍），$\therefore a_8=\frac{a_2}{16}$；

综上，a_2、a_5、a_8成等比数列，公比为$\frac{1}{4}$；

（3）由$2a_n=a_{n+1}+a_{n-1}$或$2a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$，可知$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=1$或$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=-\frac{1}{2}$，

由第（2）问可知，$a_r=0\Rightarrow a_{r-2}=2a_{r-1}\Rightarrow a_{r-1}-a_{r-2}=-a_{r-1}$，

$\therefore a_r=0\Rightarrow a_{r+1}=\frac{1}{2}a_{r-1}=-\frac{1}{2}(a_{r-1}-a_{r-2})=-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^i\cdot 1^{r-3-i}\cdot(a_2-a_1)=-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^i$，$i\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore (a_{r+1})_{\max}=\frac{1}{4}$，

同理，$a_{s+1}=-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^j\cdot 1^{s-2-r-j}\cdot(a_{r+1}-a_r)=-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^j\cdot\frac{1}{4}$，$j\in\mathbf{N}^*$，$\therefore (a_{s+1})_{\max}=\frac{1}{16}$，

同理，$(a_{t+1})_{\max}=\frac{1}{64}$，$\therefore a_{r+1}+a_{s+1}+a_{t+1}$的最大值为$\frac{21}{64}$

【点睛】关键点点睛：由$a_r=0\Rightarrow a_{r-2}=2a_{r-1}\Rightarrow a_{r-1}-a_{r-2}=-a_{r-1}$，再利用$a_r=0\Rightarrow a_{r+1}=\frac{1}{2}a_{r-1}=-\frac{1}{2}(a_{r-1}-a_{r-2})$，再结合$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=1$①或$\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=-\frac{1}{2}$②，$a_{r-1}-a_{r-2}$按②变换$i$次，按①变换$r-3-i$次，求出$a_{r+1}=-\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})^i$，同理求出其他，属于难题.