

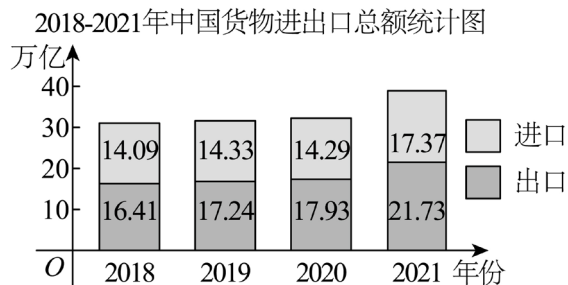
2023 年上海春季高考数学试题

一、填空题

1. 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, a\}$, 且 $A = B$, 则 $a =$ _____.
2. 已知向量 $\vec{a} = (3, 4)$, $\vec{b} = (1, 2)$, 则 $\vec{a} - 2\vec{b} =$ _____.
3. 若不等式 $|x - 1| \leq 2$, 则实数 x 的取值范围为_____.
4. 已知圆 C 的一般方程为 $x^2 + 2x + y^2 = 0$, 则圆 C 的半径为_____.
5. 已知事件 A 发生的概率为 $P(A) = 0.5$, 则它的对立事件 \bar{A} 发生的概率 $P(\bar{A}) =$ _____.
6. 已知正实数 a, b 满足 $a + 4b = 1$, 则 ab 的最大值为_____.
7. 某校抽取 100 名学生测身高, 其中身高最大值为 186cm, 最小值为 154cm, 根据身高数据绘制频率组距分布直方图, 组距为 5, 且第一组下限为 153.5, 则组数为_____.
8. 设 $(1 - 2x)^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 则 $a_0 + a_4 =$ _____.
9. 已知函数 $f(x) = 2^{-x} + 1$, 且 $g(x) = \begin{cases} \log_2(x + 1), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$, 则方程 $g(x) = 2$ 的解为_____.
10. 已知有 4 名男生 6 名女生, 现从 10 人中任选 3 人, 则恰有 1 名男生 2 名女生的概率为_____.
11. 设 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ 且 $z_1 = i \cdot \bar{z}_2$, 满足 $|z_1 - 1| = 1$, 则 $|z_1 - z_2|$ 的取值范围为_____.
12. 已知空间向量 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ 都是单位向量, 且 $\vec{OA} \perp \vec{OB}, \vec{OA} \perp \vec{OC}, \vec{OB}$ 与 \vec{OC} 的夹角为 60° , 若 P 为空间任意一点, 且 $|\vec{OP}| = 1$, 满足 $|\vec{OP} \cdot \vec{OC}| \leq |\vec{OP} \cdot \vec{OB}| \leq |\vec{OP} \cdot \vec{OA}|$, 则 $\vec{OP} \cdot \vec{OC}$ 的最大值为_____.

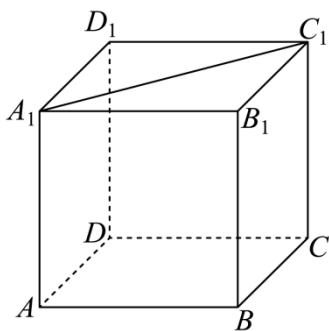
二、单选题

13. 下列函数是偶函数的是 ().
 A. $y = \sin x$ B. $y = \cos x$ C. $y = x^3$ D. $y = 2^x$
14. 如图为 2018-2021 年中国货物进出口总额的条形统计图, 则下列对于进出口贸易额描述错误的是 ()



- A. 从 2018 年开始, 2021 年的进出口总额增长率最大
 - B. 从 2018 年开始, 进出口总额逐年增大
 - C. 从 2018 年开始, 进口总额逐年增大
 - D. 从 2018 年开始, 2020 年的进出口总额增长率最小
15. 如图所示, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 为线段 A_1C_1 上的动点, 则下列直线中, 始终与直线 BP 异面的是

()



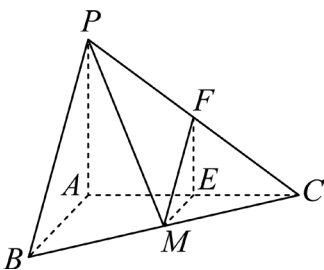
- A. DD_1 B. AC C. AD_1 D. B_1C

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为实数, S_n 为其前 n 项和, 若对任意 $k > 2022$, 都有 $|S_k| > |S_{k+1}|$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}$ 为等差数列, $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}$ 为等比数列
 B. $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{2n-1}$ 为等比数列, $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}$ 为等差数列
 C. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2022}$ 为等差数列, $a_{2022}, a_{2023}, a_{2024}, \dots, a_n$ 为等比数列
 D. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2022}$ 为等比数列, $a_{2022}, a_{2023}, a_{2024}, \dots, a_n$ 为等差数列

三、解答题

17. 已知三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp AC$, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = AB = 3$, $AC = 4$, M 为 BC 中点, 过点 M 分别作平行于平面 PAB 的直线交 AC 、 PC 于点 E 、 F .



- (1) 求直线 PM 与平面 ABC 所成的角的正切值;
 (2) 证明: 平面 $MEF \parallel$ 平面 PAB , 并求直线 ME 到平面 PAB 的距离.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A 、 B 、 C 所对的边为 a 、 b 、 c , 其中 $b = 2$

- (1) 若 $A + C = 60^\circ$, 且 $a = 2c$, 求边长 c 的值;
 (2) 若 $A - C = 30^\circ$, $a = \sqrt{2}c \sin A$, 求 $S_{\triangle ABC}$.

19. 已知 S 为正比例系数, 定义: $S = \frac{F_0}{V_0}$, F_0 为建筑物暴露在空气中的面积 (单位: 平方米), V_0 为建筑物的体积 (单位: 立方米).

- (1) 若有一个圆柱体建筑的底面半径为 R , 高度为 H , 求该建筑体的 S (用 R, H 表示);
 (2) 现有一个建筑体, 侧面皆垂直于地面, 设 A 为底面面积, L 为建筑底面周长. 已知 f 为正比例系数, L^2 与 A 成正比, 定义: $f = \frac{L^2}{A}$, 建筑面积即为每一层的底面面积, 总建筑面积即为每层建筑面积之和, 值为 T . 已知该建筑体推导出

出 $S = \sqrt{\frac{f \cdot n}{T}} + \frac{1}{3n}$, n 为层数, 层高为3米, 其中 $f = 18, T = 10000$, 试求当取第几层时, 该建筑体 S 最小?

20. 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (m > 0, m \neq \sqrt{3})$.

(1)若 $m = 2$, 求椭圆 Γ 的离心率;

(2)设 A_1, A_2 为椭圆 Γ 的左右顶点, 若椭圆 Γ 上一点 E 的纵坐标为1, 且 $\overrightarrow{EA_1} \cdot \overrightarrow{EA_2} = -2$, 求 m 的值;

(3)若 P 为椭圆 Γ 上一点, 过点 P 作一条斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线与双曲线 $\frac{y^2}{5m^2} - \frac{x^2}{5} = 1$ 仅有一个公共点, 求 m 的取值范围.

21. 设函数 $f(x) = ax^3 - (a+1)x^2 + x, g(x) = kx + m$, 其中 $a \geq 0, k, m \in \mathbb{R}$, 若任意 $x \in [0, 1]$ 均有 $f(x) \leq g(x)$, 则称函数 $y = g(x)$ 是函数 $y = f(x)$ 的控制函数”, 且对于所有满足条件的函数 $y = g(x)$ 在 x 处取得的最小值记为 $\bar{f}(x)$.

(1)若 $a = 2, g(x) = x$, 试问 $y = g(x)$ 是否为 $y = f(x)$ 的控制函数”;

(2)若 $a = 0$, 使得直线 $y = h(x)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在 $x = \frac{1}{4}$ 处的切线, 证明: 函数 $y = h(x)$ 为函数 $y = f(x)$ 的控制函数,

并求“ $\bar{f}(\frac{1}{4})$ ”的值;

(3)若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_0 (x_0 \in (0, 1))$ 处的切线过点 $(1, 0)$, 且 $c \in [x_0, 1]$, 证明: 当且仅当 $c = x_0$ 或 $c = 1$ 时, $\bar{f}(c) = f(c)$.

《2023 年上海春季高考数学试题》参考答案

题号	13	14	15	16						
答案	B	C	B	C						

1. 2

【分析】利用集合相等的定义求解即可.

【详解】因为 $A = \{1, 2\}, B = \{1, a\}$ 且 $A = B$,

所以集合 A, B 中元素相同,

所以 $a = 2$,

故答案为: 2

2. (1,0)

【分析】由平面向量的减法的坐标运算即可求解.

【详解】因为 $\vec{a} = (3, 4), \vec{b} = (1, 2)$, 所以 $\vec{a} - 2\vec{b} = (3, 4) - 2(1, 2) = (1, 0)$,

故答案为: (1,0)

3. [-1,3]

【分析】解绝对值不等式求得正确答案.

【详解】由 $|x - 1| \leq 2$, 得 $-2 \leq x - 1 \leq 2, -1 \leq x \leq 3$,

所以实数 x 的取值范围是 $[-1, 3]$.

故选: $[-1, 3]$

4. 1

【分析】先求得圆的标准方程, 从而求得圆的半径.

【详解】圆 $x^2 + 2x + y^2 = 0$ 即 $(x + 1)^2 + y^2 = 1$,

所以圆的半径为 1.

故答案为: 1

5. $\frac{1}{2}$ /0.5

【分析】根据对立事件的知识求得正确答案.

【详解】依题意, $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.5 = 0.5$.

故答案为: $\frac{1}{2}$

6. $\frac{1}{16}$

【分析】由 $ab = \frac{1}{4}a \cdot 4b \leq \frac{1}{4}\left(\frac{a+4b}{2}\right)^2$, 代入即可得出答案.

【详解】 $ab = \frac{1}{4}a \cdot 4b \leq \frac{1}{4}\left(\frac{a+4b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$,

当且仅当“ $a = 4b$ ”，即 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{8}$ 时取等，

所以 ab 的最大值为 $\frac{1}{16}$.

故答案为： $\frac{1}{16}$

7. 7

【分析】求得各组的范围，从而确定组数.

【详解】第一组[153.5,158.5)；第二组[158.5,163.5)；

第三组[163.5,168.5)；第四组[168.5,173.5)；

第五组[173.5,178.5)；第六组[178.5,183.5)；

第七组[183.5,188.5].

所以组数为7.

故答案为：7

8. 17

【分析】利用二项式展开式的通项公式求常数项和 x^4 的系数即可.

【详解】二项式 $(1 - 2x)^4$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_4^r 1^r (-2x)^{4-r} = (-2)^{4-r} C_4^r x^{4-r}$,

当 $4 - r = 0$ ，即 $r = 4$ 时， $a_0 = (-2)^{4-4} C_4^4 = 1$,

当 $4 - r = 4$ ，即 $r = 0$ 时， $a_4 = (-2)^{4-0} C_4^0 = 16$,

所以 $a_0 + a_4 = 17$,

故答案为：17

9. $x = 3$

【分析】分类讨论 $x \geq 0$ 和 $x < 0$ ，解方程 $g(x) = 2$ 的解，即可得出答案.

【详解】当 $x \geq 0$ 时， $g(x) = \log_2(x + 1) = 2$ ，解得： $x = 3$ ，

当 $x < 0$ 时， $g(x) = f(-x) = 2^x + 1 = 2$ ，解得： $x = 0$ （舍去），

所以方程 $g(x) = 2$ 的解为 $x = 3$.

故答案为： $x = 3$.

10. $\frac{1}{2}$ 或0.5

【分析】利用组合数和古典概型的概率公式求解即可.

【详解】由题意所选的3人中恰有1名男生2名女生的概率 $P = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{4 \times 15}{120} = \frac{1}{2}$,

故答案为： $\frac{1}{2}$

11. $[0, 2 + \sqrt{2}]$

【分析】判断出 z_1, z_2 对应点的轨迹，从而求得 $|z_1 - z_2|$ 的取值范围.

【详解】设 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di, a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$\overline{z_2} = c - di$, 则 $a + bi = i \cdot (c - di) = d + ci$,

所以 $\begin{cases} a = d \\ b = c \end{cases}$,

$|z_1 - 1| = |(a - 1) + bi| = \sqrt{(a - 1)^2 + b^2} = 1$, 所以 $(a - 1)^2 + b^2 = 1$,

即 z_1 对应点 (a, b) 在以 $(1, 0)$ 为圆心, 半径为1的圆 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 上.

$z_2 = c + di = b + ai$, z_2 对应点为 (b, a) ,

(a, b) 与 (b, a) 关于 $y = x$ 对称,

所以点 (b, a) 在以 $(0, 1)$ 为圆心, 半径为1的圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 上,

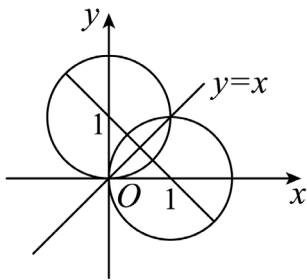
$|z_1 - z_2|$ 表示 (a, b) 与 (b, a) 两点间的距离,

圆 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 与圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 相交, 圆心距为 $\sqrt{2}$, 如图所示,

所以 $|z_1 - z_2|$ 的最小值为0, 最大值为 $\sqrt{2} + 1 + 1 = 2 + \sqrt{2}$,

所以 $|z_1 - z_2|$ 的取值范围为 $[0, 2 + \sqrt{2}]$.

故答案为: $[0, 2 + \sqrt{2}]$

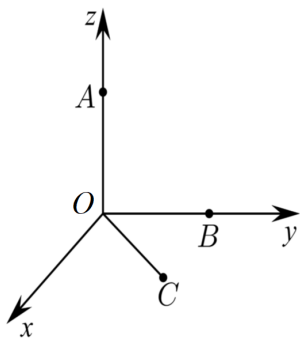


12. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

【分析】以 O 为坐标原点, OA 为 z 轴, OB 为 y 轴, 垂直于 zOy 平面为 x 轴建立空间直角坐标系, $|\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC}| \leq |\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB}| \leq |\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA}|$ 由坐标表示得 $\frac{3}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 \leq y^2 \leq z^2$, 画出可行域利用线性规划求解即可.

【详解】因为 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}, OB \cap OC = O$, 所以 $OA \perp$ 平面 BOC ,

以 O 为坐标原点, OA 为 z 轴, OB 为 y 轴, 垂直于 zOy 平面为 x 轴建立如图所示坐标系,



因为 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ 都是单位向量, \overrightarrow{OB} 与 \overrightarrow{OC} 的夹角即 $\angle BOC$ 为 60° ,

所以 $A(0, 0, 1), B(0, 1, 0), C(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$,

设点 $P(x, y, z)$, 且 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

则 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$, $\overrightarrow{OA} = (0, 0, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{OC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$,

所以由 $|\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC}| \leq |\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB}| \leq |\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA}|$ 得 $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right| \leq |y| \leq |z|$,

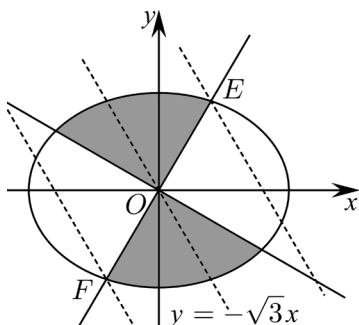
平方得 $\frac{3}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 \leq y^2 \leq z^2$,

由 $\frac{3}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 \leq y^2$ 可得 $3x^2 + 2\sqrt{3}xy - 3y^2 = (\sqrt{3}x + 3y)(\sqrt{3}x - y) \leq 0$,

所以 $\begin{cases} \sqrt{3}x + 3y \geq 0 \\ \sqrt{3}x - y \leq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \sqrt{3}x + 3y \leq 0 \\ \sqrt{3}x - y \geq 0 \end{cases}$,

由 $y^2 \leq z^2$ 及 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 可得 $y^2 \leq 1 - x^2 - y^2$ 即 $x^2 + 2y^2 \leq 1$,

综上满足 $\frac{3}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 \leq y^2 \leq z^2$ 的可行域如图所示,



令 $z = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$, 则 $y = -\sqrt{3}x + 2z$,

由可行域可得 z 在 E 点取得最大值, 在 F 点取得最小值,

由 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases}$ 解得 $E\left(\frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{7}\right)$, $F\left(-\frac{\sqrt{7}}{7}, -\frac{\sqrt{21}}{7}\right)$,

所以 $z_{\max} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $z_{\min} = -\frac{\sqrt{21}}{7}$,

所以 $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right|$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$,

故答案为: $\frac{\sqrt{21}}{7}$

13. B

【分析】直接运用常见函数的奇偶性判断即可.

【详解】根据所学知识, 知道 $y = \sin x, y = x^3$ 为奇函数, $y = \cos x$ 为偶函数, $y = 2^x$ 为非奇非偶函数.

故选: B.

14. C

【分析】根据已知条形统计图分别判断各个选项即可.

【详解】2021年相对于2020年进出口额增量增加特别明显, 故最后一年的增长率最大, A正确;

统计图中的每一年条形图的高度逐年增加, 故B正确;

2020年相对于2019年的进口总额是减少的, 故C错误;

显然进出口总额 2021 年的增长率最大，而 2020 年相对于 2019 年的增量比 2019 年相对于 2018 年的增量小，且计算增长率时前者的分母还大，故 2020 年的增长率一定最小，D 正确。

故选：C.

15. B

【分析】根据异面直线的定义一一判断即可.

【详解】由正方体的性质易知当 P 为 A_1C_1 的中点时， P 为 B_1D_1 的中点，

而 $DD_1 // BB_1$ ，所以 B, D, D_1, B_1 共面，则 BP, DD_1 在平面 BDD_1B_1 上，故 A 不符合题意；

因为 $AA_1 // CC_1$ ，即 A, C, C_1, A_1 共面，

易知 $P \in$ 平面 ACC_1A_1 ，而 $B \notin$ 平面 ACC_1A_1 ， $P \in A_1C_1$ ， $P \notin AC$ ，

故 BP 与 AC 异面，故 B 符合题意；

当 P, C_1 重合时，易知 $AB // D_1C_1, AB = D_1C_1$ ，

则四边形 ABC_1D_1 是平行四边形，则此时 $AD_1 // BP$ ，故 C 不符合题意；

当 P, C_1 重合时，显然 B_1C, BP 相交，故 D 不符合题意.

故选：B.

16. C

【分析】令 $f(n) = |S_n|$ (S_n 是等差数列的前 n 项和), 由题意可得当 $n > 2022$ 时, $f(n)$ 单调递减, 结合二次函数的性质和选项逐一判断即可.

【详解】解: 令 $f(n) = |S_n| \geq 0$, 由题意当 $n > 2022$ 时, $f(n)$ 单调递减,

对于首项为 a_1 , 公差为 d 的等差数列,

则前 n 项和 $T_n = na_1 + \frac{n^2-n}{2}d = \frac{d}{2} \cdot n^2 + (a_1 - \frac{d}{2}) \cdot n$ (不含常数项),

此时 $f(n) = |T_n| = |\frac{d}{2} \cdot n^2 + (a_1 - \frac{d}{2}) \cdot n|$,

由二次函数的性质知: 当 n 足够大时, $f(n)$ 不可能为单调递减函数,

所以, A 中奇数项及 B 中偶数项为等差数列均不合题意;

对于 C, 当前 2022 项为等差数列, 从第 2022 项开始为等比数列且公比 $q \in (0,1)$ 时, 满足 $f(n) > f(n+1)$, 故符合题意;

对于 D, 当前 2022 项为等比数列, 从第 2022 项为等差数列时, 同 A、B 分析: 当 n 足够大时, 不满足 $f(n) > f(n+1)$, 即 $f(n)$ 不可能为单调递减函数, 故不合题意

故选: C.

【点睛】方法点睛: 等差数列的前 n 项和 S_n 是关于 n 的二次二项式(不含常数项), 在研究有关等差数列前 n 项和的有关性质, 从二次函数的性质出发, 能使问题得到简化.

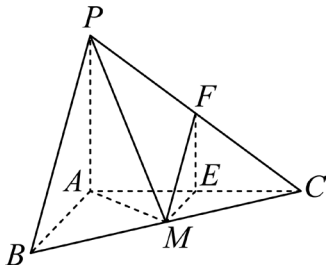
17. $(1)\frac{5}{4}$

(2)证明见解析；2

【分析】(1) 根据直线与平面夹角的定义即可知 $\angle PMA$ 即为直线 PM 与平面 ABC 所成的角，然后利用线段长直接求解即可.

(2) 利用面面平行的判定定理直接证明即可；根据线面间的距离转化为点面距离，即可得出答案.

【详解】(1)



因为 $PA \perp$ 平面 ABC ，连接 AM ，

则 $\angle PMA$ 即为直线 PM 与平面 ABC 所成的角，

又 $PA = AB = 3$ ， $AC = 4$ ， $AB \perp AC$ ，

M 为 BC 中点，可得 $BC = 5$ ， $AM = \frac{5}{2}$ ，

所以 $\tan \angle PMA = \frac{PA}{AM} = \frac{6}{5}$ ，

即直线 PM 与平面 ABC 所成的角的正切值为 $\frac{6}{5}$.

(2) 由题知， $ME \parallel$ 平面 PAB ， $MF \parallel$ 平面 PAB ，

$ME \cap MF = M$ ， $ME, MF \subset$ 平面 MEF ，

所以平面 $MEF \parallel$ 平面 PAB .

因为 $PA \perp$ 平面 ABC ， $AC \subset$ 平面 ABC ，

所以 $PA \perp AC$ ，

又 $AC \perp AB$ ， $AB, PA \subset$ 平面 PAB ， $AB \cap PA = A$ ，

所以 $AC \perp$ 平面 PAB ，又 $ME \parallel$ 平面 PAB ，

所以 AE 就是直线 ME 到平面 PAB 的距离，

又 M 为 BC 中点，

则 $AE = \frac{1}{2}AC = 2$ ，

即直线 ME 到平面 PAB 的距离为2.

18. (1) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

(2) $\frac{\sqrt{3}+3}{3}$

【分析】(1) 求出 B 根据余弦定理求解；

(2) 根据正弦定理求出 C 及 c , 再由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A$ 求面积即可.

【详解】(1) 因为 $A + C = 60^\circ$, 所以 $B = 180^\circ - (A + C) = 120^\circ$,

$$\text{由余弦定理得 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \times a \times c} = \frac{4c^2 + c^2 - 4}{2 \times 2c \times c} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{解得 } c = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

(2) 因为 $a = \sqrt{2}c\sin A$, 所以 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \sqrt{2}c$, 所以 $C = 45^\circ$

因为 $A - C = 30^\circ$, 所以 $A = 75^\circ$, $B = 60^\circ$,

$$\text{所以 } c = \frac{b\sin C}{\sin B} = \frac{2\sqrt{6}}{3},$$

$$\sin A = \sin 75^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3}.$$

19. (1) $\frac{2H+R}{HR}$

(2) 6

【分析】(1) 利用圆柱体的表面积和体积公式, 结合题目中 S 的定义求解即可;

(2) 利用导函数求 S 的单调性, 即可求出 S 最小时 n 的值.

【详解】(1) 由圆柱体的表面积和体积公式可得:

$$F_0 = 2\pi RH + \pi R^2, \quad V_0 = \pi R^2 H,$$

$$\text{所以 } S = \frac{F_0}{V_0} = \frac{\pi R(2H+R)}{\pi R^2 H} = \frac{2H+R}{HR}.$$

(2) 由题意可得 $S = \sqrt{\frac{18n}{10000}} + \frac{1}{3n} = \frac{3\sqrt{2n}}{100} + \frac{1}{3n}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{所以 } S' = \frac{3\sqrt{2}}{200\sqrt{n}} - \frac{1}{3n^2} = \frac{9\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}} - 200}{600n^2}, \quad \text{令 } S' = 0 \text{ 即 } 9\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}} - 200 = 0,$$

$$\text{解得 } n = \sqrt[3]{\frac{20000}{81}} \approx 6.274,$$

所以 S 在 $\left[1, \sqrt[3]{\frac{20000}{81}}\right]$ 单调递减, 在 $\left[\sqrt[3]{\frac{20000}{81}}, +\infty\right)$ 单调递增,

所以 S 的最小值在 $n = 6$ 或 $n = 7$ 取得,

$$\text{当 } n = 6 \text{ 时, } S = \frac{3\sqrt{2 \times 6}}{100} + \frac{1}{3 \times 6} \approx 0.159,$$

$$\text{当 } n = 7 \text{ 时, } S = \frac{3\sqrt{2 \times 7}}{100} + \frac{1}{3 \times 7} \approx 0.160,$$

所以在第 6 层时, 该建筑体 S 最小.

20. (1) $\frac{1}{2}$

(2) 3

(3) $(\sqrt{3}, 3]$

【分析】(1) 由椭圆的离心率定义即可得出答案；

(2) 设 $A_1(-m, 0), A_2(m, 0)$, 求出 E 点的坐标, 表示出 $\overrightarrow{EA_1}, \overrightarrow{EA_2}$, 由数量积的定义求出 $\overrightarrow{EA_1} \cdot \overrightarrow{EA_2}$, 即可求出 m 的值；

(3) 设该直线为 $l: y = \sqrt{3}x + b$, 直线 l 与双曲线 $\frac{y^2}{5m^2} - \frac{x^2}{5} = 1$ 仅有一个公共点, 讨论直线 l 与双曲线 $\frac{y^2}{5m^2} - \frac{x^2}{5} = 1$ 的渐近线平行和直线 l 与双曲线 $\frac{y^2}{5m^2} - \frac{x^2}{5} = 1$ 的渐近线不平行结合 P 为椭圆 Γ 上一点即可得出答案.

【详解】(1) 当 $m = 2$ 时, 椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 焦点在 x 上,

则 $a^2 = 4, b^2 = 3, c^2 = a^2 - b^2 = 1$, 则 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

(2) 因为 A_1, A_2 为椭圆 Γ 的左右顶点, 所以 $A_1(-m, 0), A_2(m, 0)$,

令 $\Gamma: \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 中 $y = 1$, 则 $\frac{x^2}{m^2} + \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{m^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}m$,

若 $E\left(\frac{\sqrt{6}}{3}m, 1\right)$, $\overrightarrow{EA_1} = \left(-m - \frac{\sqrt{6}}{3}m, -1\right), \overrightarrow{EA_2} = \left(m - \frac{\sqrt{6}}{3}m, -1\right)$,

$\overrightarrow{EA_1} \cdot \overrightarrow{EA_2} = \left(-m - \frac{\sqrt{6}}{3}m\right)\left(m - \frac{\sqrt{6}}{3}m\right) + 1 = -2$,

解得: $m = 3$.

若 $E\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}m, 1\right)$, $\overrightarrow{EA_1} = \left(-m + \frac{\sqrt{6}}{3}m, -1\right), \overrightarrow{EA_2} = \left(m + \frac{\sqrt{6}}{3}m, -1\right)$,

$\overrightarrow{EA_1} \cdot \overrightarrow{EA_2} = \left(-m + \frac{\sqrt{6}}{3}m\right)\left(m + \frac{\sqrt{6}}{3}m\right) + 1 = -2$,

解得: $m = 3$.

(3) 若 P 为椭圆 Γ 上一点, 过点 P 作一条斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线,

设该直线为 $l: y = \sqrt{3}x + b$, 直线 l 与双曲线 $\frac{y^2}{5m^2} - \frac{x^2}{5} = 1$ 仅有一个公共点,

① 直线 l 与双曲线 $\frac{y^2}{5m^2} - \frac{x^2}{5} = 1$ 的渐近线平行时,

则双曲线 $\frac{y^2}{5m^2} - \frac{x^2}{5} = 1$ 的渐近线为: $y = \pm mx$, 所以 $m = \sqrt{3}$.

因为 P 为椭圆 Γ 上一点, 所以 $m > 0, m \neq \sqrt{3}$, 所以不满足题意.

② 直线 l 与双曲线 $\frac{y^2}{5m^2} - \frac{x^2}{5} = 1$ 的渐近线不平行时,

$\begin{cases} \frac{y^2}{5m^2} - \frac{x^2}{5} = 1 \\ y = \sqrt{3}x + b \end{cases}$, 则 $(3 - m^2)x^2 + 2\sqrt{3}bx + b^2 - 5m^2 = 0$,

则 $\begin{cases} 3 - m^2 \neq 0 \\ \Delta = (2\sqrt{3}b)^2 - 4(3 - m^2)(b^2 - 5m^2) = 0 \end{cases}$, 解得: $b^2 = 5m^2 - 15 \geq 0$,

解得: $m^2 \geq 3$, 因为 $m > 0, m \neq \sqrt{3}$, 所以 $m > \sqrt{3}$.

又因为 P 为椭圆 Γ 上一点, 所以 $\begin{cases} \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = \sqrt{3}x + b \end{cases}$, 则 $(3 + 3m^2)x^2 + 2\sqrt{3}bm^2x + (b^2 - 3)m^2 = 0$,

则 $\Delta = (2\sqrt{3}bm^2)^2 - 4(3 + 3m^2)(b^2 - 3)m^2 \geq 0$, 解得: $b^2 \leq 3m^2 + 3$,

所以 $5m^2 - 15 \leq 3m^2 + 3$, 所以 $-3 \leq m \leq 3$, 综上所述: $\sqrt{3} < m \leq 3$.

则 m 的取值范围为: $(\sqrt{3}, 3]$

21. (1) $y = g(x)$ 是 $y = f(x)$ 的控制函数

(2) 证明见解析, $\bar{f}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 令 $m(x) = f(x) - g(x)$, 利用导函数求单调性进而判断 $m(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的正负即可;

(2) 利用导数的几何意义求得切线 $h(x)$ 的方程, 再利用导函数求单调性进而判断 $f(x) - g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的正负即可;

(3) 设曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_0 (x_0 \in (0, 1))$ 处的切线为 $t(x)$, 利用切线过 $(1, 0)$ 求出 x_0 与 a 的关系, 再利用控制函数的定义求解即可;

【详解】(1) 当 $a = 2, g(x) = x$ 时, 令 $m(x) = f(x) - g(x) = 2x^3 - 3x^2$,

所以 $m'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$, 令 $m'(x) = 0$ 解得 $x = 0$ 或 1 ,

所以 $m(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减,

又因为 $m(0) = 0$, 所以 $m(x)$ 在 $[0, 1]$ 上小于等于 0 恒成立,

即 $f(x) \leq g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上恒成立, 所以由题意 $y = g(x)$ 是 $y = f(x)$ 的控制函数.

(2) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = -x^2 + x$, $f'(x) = -2x + 1$,

所以 $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在 $x = \frac{1}{4}$ 处的切线为 $y - \frac{3}{16} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right)$, 整理得 $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$,

令 $n(x) = f(x) - h(x) = -x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$, 则 $n'(x) = -2x + \frac{1}{2}$,

令 $n'(x) = 0$ 解得 $x = \frac{1}{4}$, 所以 $n(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 单调递增, 在 $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ 单调递减,

又 $n\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, 所以 $n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上小于等于 0 恒成立,

即 $f(x) \leq h(x)$ 在 $[0, 1]$ 上恒成立, 所以 $y = h(x)$ 是 $y = f(x)$ 的控制函数,

由题意 $\bar{f}\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$.

(3) 由题意 $f(x) = ax^3 - (a + 1)x^2 + x$, $f'(x) = 3ax^2 - 2(a + 1)x + 1$,

设 $y = f(x)$ 在 $x = x_0 (x_0 \in (0, 1))$ 处的切线为 $t(x)$,

则 $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, 因为 $t(x_0) = f(x_0)$, $t(1) = 0$ 且 $f(1) = 0$,

所以 $f'(x_0) = 3ax_0^2 - 2(a + 1)x_0 + 1 \Rightarrow f'(x_0)(1 - x_0) = f(1) - f(x_0) = x_0(ax_0 - 1)(1 - x_0)$,

$\Rightarrow 3ax_0^2 - 2(a + 1)x_0 + 1 = ax_0^2 - x_0 \Rightarrow (2ax_0 - 1)(x_0 - 1) = 0, x_0 \neq 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2x_0} \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2a}$

$$\text{所以 } f'(x_0) = 3ax_0^2 - 2(a+1)x_0 + 1 = 3a\left(\frac{1}{2a}\right)^2 - 2(a+1)\left(\frac{1}{2a}\right) + 1 = -\frac{1}{4a},$$

$$f(x_0) = a\left(\frac{1}{2a}\right)^3 - (a+1)\left(\frac{1}{2a}\right)^2 + \frac{1}{2a} = \frac{2a-1}{8a^2},$$

$$\text{所以 } t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -\frac{1}{4a}\left(x - \frac{1}{2a}\right) + \frac{2a-1}{8a^2} \Rightarrow t(x) = -\frac{1}{4a}(x - 1),$$

$$\text{则 } f(x) = x(x-1)(ax-1) \leq t(x) \Rightarrow ax^2 - x + \frac{1}{4a} \geq 0, \text{ 即 } \left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 \geq 0 \text{ 恒成立,}$$

所以函数 $t(x)$ 必是函数 $y = f(x)$ 的“控制函数”.

$\forall g(x) = kx + m \geq f(x) \Rightarrow \forall \bar{f}(x) \geq f(x), \bar{f}(x) = f(x), x \in (0,1)$ 是函数 $y = f(x)$ 的“控制函数”

此时“控制函数” $g(x)$ 必与 $y = f(x)$ 相切于 x 点, $t(x)$ 与 $y = f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2a}$ 处相切, 且过点 $(1,0)$,

由上及 $f(x) \leq t(x)$ 知: 当且仅当 $x = \frac{1}{2a}$ 或 $x = 1$ 时等号成立, 其他位置恒有 $f(x) < t(x)$,

$$\text{所以 } \bar{f}(c) = f(c) \Rightarrow c = \frac{1}{2a} = x_0 \text{ 或 } c = 1.$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在 $x = x_0 (x_0 \in (0,1))$ 处的切线过点 $(1,0)$, 且 $c \in [x_0, 1]$,

当且仅当 $c = x_0$ 或 $c = 1$ 时, $\bar{f}(c) = f(c)$.

【点睛】 关键点点睛: 对于第3问, 利用导数求得在一点处的切线, 再根据切线过 $(1,0)$ 点可解出 a 与 x_0 的关系.