

C. 若 $\alpha \parallel \beta$, $m \perp \alpha$, $n \perp \beta$, 则 $m \parallel n$

D. 若 $\alpha \parallel \beta$, $m \perp \alpha$, $m \parallel n$, 则 $n \perp \beta$

15. 有四种礼盒, 前三种里面分别仅装有中国结、记事本、笔袋, 第四个礼盒里面三种礼品都有, 现从中任选一个盒子, 设事件A: 所选盒中有中国结, 事件B: 所选盒中有记事本, 事件C: 所选盒中有笔袋, 则 ()

A. 事件A与事件B互斥

B. 事件A与事件B相互独立

C. 事件A与事件 $B \cup C$ 互斥

D. 事件A与事件 $B \cap C$ 相互独立

16. 现定义如下: 当 $x \in (n, n+1)$ 时($n \in \mathbb{N}$), 若 $f(x+1) = f'(x)$, 则称 $f(x)$ 为延展函数. 已知当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) = e^x$ 且 $h(x) = x^{10}$, 且 $g(x), h(x)$ 均为延展函数, 则以下结论 ()

(1) 存在 $y = kx + b$ ($k, b \in \mathbb{R}, k, b \neq 0$)与 $y = g(x)$ 有无穷个交点

(2) 存在 $y = kx + b$ ($k, b \in \mathbb{R}, k, b \neq 0$)与 $y = h(x)$ 有无穷个交点

A. (1)(2)都成立

B. (1)(2)都不成立

C. (1)成立(2)不成立

D. (1)不成立(2)成立.

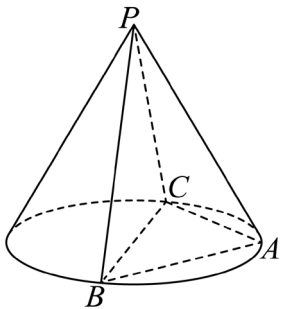
三、解答题

17. 已知 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$, $\omega > 0$

(1) 设 $\omega = 1$, 求解: $y = f(x), x \in [0, \pi]$ 的值域;

(2) $a > \pi$ ($a \in \mathbb{R}$), $f(x)$ 的最小正周期为 π , 若在 $x \in [\pi, a]$ 上恰有3个零点, 求 a 的取值范围.

18. 如图, PA, PB, PC 为圆锥三条母线, $AB = AC$.



(1) 证明: $PA \perp BC$;

(2) 若圆锥侧面积为 $\sqrt{3}\pi$, BC 为底面直径, $BC = 2$, 求二面角 $B - PA - C$ 的大小

19. 水果分为一级果和二级果, 共136箱, 其中一级果102箱, 二级果34箱.

(1) 随机挑选两箱水果, 求恰好一级果和二级果各一箱的概率;

(2) 进行分层抽样, 共抽8箱水果, 求一级果和二级果各几箱;

(3) 抽取若干箱水果, 其中一级果共120个, 单果质量平均数为303.45克, 方差为603.46; 二级果48个, 单果质量平均数为240.41克, 方差为648.21; 求168个水果的方差和平均数, 并预估果园中单果的质量.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点A为椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上一点, F_1, F_2 分别为椭圆的左、右焦点.

(1) 若点A的横坐标为2, 求 $|AF_1|$ 的长;

(2) 设 Γ 的上、下顶点分别为 M_1 、 M_2 ，记 $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 S_1 ， $\triangle AM_1M_2$ 的面积为 S_2 ，若 $S_1 \geq S_2$ ，求 $|OA|$ 的取值范围

(3) 若点 A 在 x 轴上方，设直线 AF_2 与 Γ 交于点 B ，与 y 轴交于点 K ， KF_1 延长线与 Γ 交于点 C ，是否存在 x 轴上方的点 C ，使得 $\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B} + \overrightarrow{F_1C} = \lambda(\overrightarrow{F_2A} + \overrightarrow{F_2B} + \overrightarrow{F_2C})$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)成立？若存在，请求出点 C 的坐标；若不存在，请说明理由.

21. 记 $M(a) = \{t \mid t = f(x) - f(a), x \geq a\}$ ， $L(a) = \{t \mid t = f(x) - f(a), x \leq a\}$

(1) 若 $f(x) = x^2 + 1$ ，求 $M(1)$ 和 $L(1)$;

(2) 若 $f(x) = x^3 - 3x^2$ ，求证：对于任意 $a \in \mathbb{R}$ ，都有 $M(a) \subseteq [-4, +\infty)$ ，且存在 a ，使得 $-4 \in M(a)$.

(3) 已知定义在 \mathbb{R} 上 $f(x)$ 有最小值，求证“ $f(x)$ 是偶函数”的充要条件是“对于任意正实数 c ，均有 $M(-c) = L(c)$ ”.

《2024 年上海春季高考练习数学试题》参考答案

题号	13	14	15	16						
答案	B	B	B	D						

1. $(0, +\infty)$

【分析】由对数函数性质即可得.

【详解】由题意可得 $x > 0$, 即 $y = \log_2 x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

故答案为: $(0, +\infty)$.

2. $\frac{\pi}{4}$

【分析】由直线方程求斜率, 根据斜率与倾斜角关系求倾斜角.

【详解】设直线 $x - y + 1 = 0$ 的倾斜角为 θ , $\theta \in [0, \pi)$,

将直线转化为斜截式 $y = x + 1$, 可知直线的斜率为 1,

所以 $\tan\theta = 1$,

所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$,

所以直线 $x - y + 1 = 0$ 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$.

故答案为: $\frac{\pi}{4}$.

3. $-1 - i / -i - 1$

【分析】借助复数的乘法运算与共轭复数定义计算即可得.

【详解】由题意可得 $z = i(1 + i) = -1 + i$, 故 $\bar{z} = -1 - i$.

故答案为: $-1 - i$.

4. 15

【分析】根据给定条件, 利用二项式定理直接求出结果.

【详解】 $(x - 1)^6$ 展开式中令 x^4 的项为 $C_6^2 x^4 (-1)^2 = 15x^4$,

所以 $(x - 1)^6$ 展开式中 x^4 的系数为 15.

故答案为: 15

5. $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{3}$

【分析】根据已知条件, 结合正弦定理, 即可求解.

【详解】三角形 ABC 中, $\because A + B + C = \pi, A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{\pi}{4}, \therefore C = \frac{5\pi}{12}$,

$$\sin C = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4},$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}, \quad BC = 2, \quad A = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{得 } AB = \frac{BC \sin C}{\sin A} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{3}.$$

故答案为: $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{3}$.

6. 12

【分析】利用不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ 即可求解.

【详解】 $4a^2 + 9b^2 = (2a)^2 + (3b)^2 \geq 2 \times 2a \times 3b = 12ab = 12$,

当且仅当 $\begin{cases} 2a = 3b \\ ab = 1 \end{cases}$, 即 $a = \frac{\sqrt{6}}{2}, b = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $a = -\frac{\sqrt{6}}{2}, b = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时, 等号成立,

故 $4a^2 + 9b^2$ 的最小值为 12.

故答案为: 12.

7. $(-\infty, -4)$

【分析】先利用等差数列的定义判定 $\{a_n\}$ 为等差数列, 再利用等差数列性质即可求解.

【详解】因为 $a_n = n + c$, 则 $a_{n+1} - a_n = (n + 1 + c) - (n + c) = 1$,

可知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,

则 $S_7 = 7a_4 = 7(4 + c) < 0$, 解得 $c < -4$,

所以 c 的取值范围为 $(-\infty, -4)$.

故答案为: $(-\infty, -4)$.

8. 3

【分析】利用双曲线的定义求解即可.

【详解】由双曲线的定义, $2c = 6, 2a = 7 - 5 = 2$,

则 $e = \frac{c}{a} = 3$.

故答案为: 3

9. $(-\infty, 1]$

【分析】分 $x \geq 0$ 与 $x < 0$ 两段求解二次不等式可得.

【详解】根据题意知 $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$.

当 $x \geq 0$ 时, $g(x) \leq 2 - x$, 即 $x^2 + x - 2 \leq 0$, 解得 $-2 \leq x \leq 1$, 则有 $0 \leq x \leq 1$;

当 $x < 0$ 时, $g(x) \leq 2 - x$, 即 $-x^2 + x - 2 \leq 0$, $x \in \mathbf{R}$, 即 $x < 0$ 时, 不等式 $g(x) \leq 2 - x$ 都成立.

综上所述, $g(x) \leq 2 - x$ 的 x 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

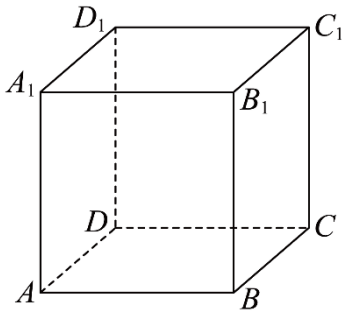
故答案为: $(-\infty, 1]$.

10. $\frac{5}{12}$

【分析】将 $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AD_1}$ 用不共面的向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AD}$ 表示出来, 从而得到 $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{DC} = 5$, 然后由公式计算夹

角余弦值即可.

【详解】



$$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1},$$

$$\therefore (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot \overrightarrow{BC} - (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot \overrightarrow{DC} = 5,$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{DC} = 5,$$

底面 $ABCD$ 为平行四边形, 所以 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{DC} = 5,$$

$$\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AA_1} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{DC} = 5.$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BD} \rangle = \frac{\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AA_1}| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{5}{3 \times 4} = \frac{5}{12},$$

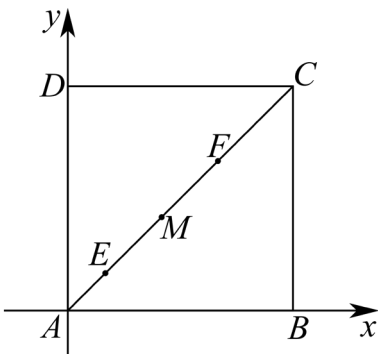
故异面直线 AA_1 与 BD 的夹角的余弦值为: $\frac{5}{12}$,

故答案为: $\frac{5}{12}$

11. 2.73

【分析】利用给定条件求解圆的半径, 再求周长即可.

【详解】如图, 以 A 为原点建系, 易知 $E(0.2, 0.2), F(0.8, 0.8)$, 连接 EF ,



不妨设 EF 中点为 $M(0.5, 0.5)$, 直线 EF 中垂线所在直线方程为 $y - 0.5 = -(x - 0.5)$,

化简得 $y = -x + 1$, 所以圆心为 $(a, -a + 1)$, 半径为 a , 且经过 E, F 点

$$\text{即 } (a - 0.2)^2 + (-a + 1 - 0.2)^2 = a^2, \text{ 化简得 } a^2 - 2a + 0.68 = 0,$$

$$\text{解得 } a = \frac{2 \pm \sqrt{1.28}}{2} = 1 \pm \sqrt{0.32} = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{5},$$

结合题意可得 $a = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{5} \approx 0.434$, 故圆的周长为 $C = 2\pi a \approx 2.73$.

故答案为: 2.73

12. 48

【分析】先确定 $\{a_i + a_j \mid 6, 10, 12, 18, 20, 24\}$ ，再结合 $\{a_1 + a_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} = \{b_1 + b_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$ ，设 $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$ ，可得到 $b_1 + b_2 = 6, b_1 + b_3 = 10, b_2 + b_4 = 20, b_3 + b_4 = 24$ ，进而求出这四个数，从而求得答案。

【详解】由题意知 $\{a_i + a_j \mid 6, 10, 12, 18, 20, 24\}$ ，

满足 $\{a_1 + a_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} = \{b_1 + b_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$ ，

不妨设 $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$ ，

则必有 $b_1 + b_2 = 6, b_1 + b_3 = 10, b_2 + b_4 = 20, b_3 + b_4 = 24$ ，

若 $b_2 + b_3 = 12, b_1 + b_4 = 18$ ，解得 $b_1 = 2, b_2 = 4, b_3 = 8, b_4 = 16$ ；

若 $b_2 + b_3 = 18, b_1 + b_4 = 12$ ，解得 $b_1 = -1, b_2 = 7, b_3 = 11, b_4 = 13$ ，

由此可知此时有 2 种情况，

结合任意 $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$ ，共有 $2P_4^4 = 48$ 对，

故答案为：48

【点睛】关键点睛：解答本题的关键是结合 $\{a_1 + a_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} = \{b_1 + b_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$ 推出 $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$ 时，这四个数的值，进而结合题意求得答案。

13. B

【分析】对 ACD，举反例判断即可；对 B，根据 $b > c$ 判断即可。

【详解】对 A，当 $c < b < 0$ 时， $c^2 > b^2$ ，则 $a + b^2 < a + c^2$ ，故 A 错误；

对 B， $b > c$ 则 $-c > -b$ 则 $a^2 - c > a^2 - b$ ，故 B 正确；

对 C，当 $a = 0$ 时 $ab^2 = ac^2$ ，故 C 错误；

对 D，当 $a = 0$ 时 $a^2b = a^2c$ ，故 D 错误。

故选：B

14. B

【分析】根据题意，由空间中线面关系逐一判断，即可得到结果。

【详解】对于 A，若 $\alpha \perp \beta, m \perp \alpha$ ，则 $m // \beta$ 或 $m \subset \beta$ ，

当 $m // \beta$ 时， $m \perp n$ ，则 $n // \beta$ 或者 n 与 β 斜交或者 $n \subset \beta$ ，

当 $m \subset \beta$ 时， $m \perp n$ ，则 $n // \beta$ 或者 n 与 β 斜交或者 $n \subset \beta$ ，故 A 错误；

对于 B，若 $\alpha \perp \beta, m \perp \alpha, n \perp \beta$ ，可在 m, n 取 \vec{m}, \vec{n} 作为 α, β 的法向量，

由于 $\alpha \perp \beta$ ，故 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$ ，即 $\vec{m} \perp \vec{n}$ ，则 $m \perp n$ ，故 B 正确；

对于 C，若 $\alpha // \beta, m // \alpha, n // \beta$ ，则 m, n 可能平行可能相交，也可能异面，故 C 错误；

对于 D，若 $\alpha // \beta, m // \alpha, m // n$ ，则 $n // \beta$ 或 $n \subset \beta$ ，故 D 错误；

故选：B

15. B

【分析】根据互斥事件和对立事件的定义，逐一判断选项即可.

【详解】选项 A，事件 A 和事件 B 可以同时发生，即第四个礼盒中可以既有中国结，又有记事本，事件 A 与事件 B 不互斥，A 错误；

$$\text{选项 B, } \because P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{1}{4},$$

$\therefore P(A)P(B) = P(AB)$, B 正确；

选项 C，事件 A 与事件 $B \cup C$ 可以同时发生，即第四个礼盒中可以既有中国结，又有记事本或笔袋，C 错误；

$$\text{选项 D, } \because P(A) = \frac{1}{2}, P(B \cap C) = \frac{1}{4}, P(A \cap (B \cap C)) = \frac{1}{4},$$

$$\therefore P(A)P(B \cap C) \neq P(A \cap (B \cap C)),$$

$\therefore A$ 与 $B \cap C$ 不独立，故 D 错误.

故选：B.

16. D

【分析】由延展函数的定义分段求出 $g(x), h(x)$ 解析式，作出函数图象，数形结合可得.

【详解】当 $x \in (1, 2)$ 时， $x - 1 \in (0, 1)$ ，则 $g(x - 1) = e^{x-1}$ ，

又 $g'(x - 1) = e^{x-1}$ ，则由延展函数定义可得 $g(x) = g'(x - 1) = e^{x-1}$ ；

同理可得，当 $x \in (2, 3)$ ， $g(x) = e^{x-2}$ ；...

任意 $n \in \mathbb{N}$ ，当 $x \in (n, n + 1)$ 时， $g(x) = e^{x-n}$.

当 $x \in (1, 2)$ 时， $x - 1 \in (0, 1)$ ，则 $h(x - 1) = (x - 1)^{10}$ ，则 $h(x) = 10(x - 1)^9$ ；

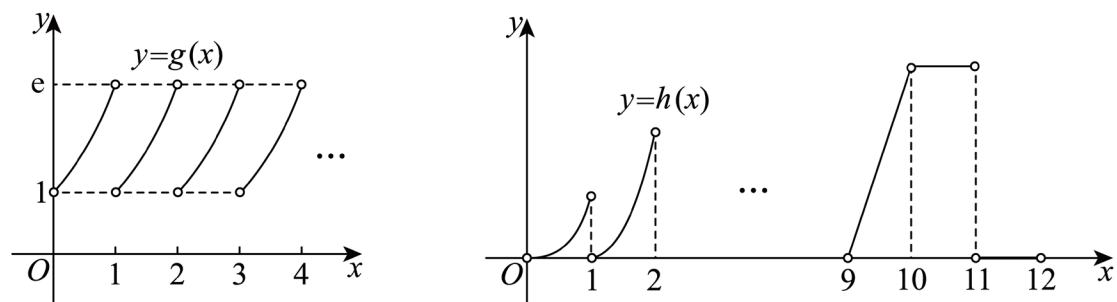
同理可得，当 $x \in (2, 3)$ 时， $h(x) = 10 \times 9(x - 2)^8$ ；...

当 $x \in (9, 10)$ 时， $h(x) = 10!(x - 9)$ ；

当 $x \in (10, 11)$ ， $h(x) = 10!$ ；当 $x \in (11, 12)$ ， $h(x) = 0$ ；...

则任意 $n \in \mathbb{N}, n \geq 11$ 时，当 $x \in (n, n + 1)$ ， $h(x) = 0$.

如图，作出 $g(x)$ 与 $h(x)$ 大致图像，



因为 $k, b \neq 0$ ，如图可知，不存在直线 $y = kx + b$ 与 $g(x)$ 图象有无穷个交点，故 (1) 不成立；

又因为当 $x \in (9, 10)$ ， $h(x) = 10!(x - 9)$ ，

故当 $k = 10!, b = -9 \times 10!$ 时，

直线 $y = 10!x - 9 \times 10!$ 与 $h(x)$ 的图象在区间 $(9, 10)$ 的函数部分重合，

即有无穷个交点，故(2)成立；

故选：D.

【点睛】关键点点睛：解决此题目的关键在于理解新定义“延展函数”，能够依次求解出函数在各段的解析式及作出函数图象，数形结合解决函数图象与直线的交点个数问题.

$$17. (1) \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right];$$

$$(2) a \in \left[\frac{7\pi}{3}, \frac{17\pi}{6}\right)$$

【分析】(1) 利用三角函数的性质结合换元法求出单调性，再求解值域即可.

(2) 利用三角函数的性质求解参数即可.

【详解】(1) 因为 $\omega = 1$ ，所以 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，

因为 $x \in [0, \pi]$ ，所以令 $t = x + \frac{\pi}{3}$ ， $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$ ，

由正弦函数性质得 $y = g(t) = \sin t$ 在 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}\right]$ 上单调递减，

所以 $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ ， $g\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，故 $y \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ ，

(2) 由题意得 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$ ，所以 $\omega = 2$ ，可得 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，

当 $f(x) = 0$ 时， $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，即 $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$ ， $k \in \mathbb{Z}$ ，

当 $k = 2$ 时， $x = \frac{5\pi}{6} < \pi$ ，不符合题意，

当 $k = 3$ 时， $x = \frac{4\pi}{3} > \pi$ ，符合题意，

当 $k = 4$ 时， $x = \frac{11\pi}{6} > \pi$ ，符合题意，

当 $k = 5$ 时， $x = \frac{7\pi}{3} > \pi$ ，符合题意，

所以 $\frac{4\pi}{3} + T \leq a < \frac{4\pi}{3} + \frac{3}{2}T$ ，

即 $\frac{7\pi}{3} \leq a < \frac{17\pi}{6}$ ，故 $a \in \left[\frac{7\pi}{3}, \frac{17\pi}{6}\right)$.

18. (1) 证明见解析

$$(2) \pi - \arccos \frac{1}{5}$$

【分析】(1) 取 BC 中点 O ，连接 AO 、 PO ，则 $AO \perp BC$ ， $PO \perp BC$ ，故可得 $BC \perp$ 面 PAO ，从而得到 $PA \perp BC$.

(2) 利用向量法可求面 PAC 、面 PAB 的法向量，计算出它们的夹角的余弦值后可得二面角的余弦值.

【详解】(1) 取 BC 中点 O ，连接 AO 、 PO ，

因为 $AB = AC$ ， $PB = PC$ ，所以 $AO \perp BC$ ， $PO \perp BC$ ，

又因为 $PO \subset$ 面 PAO ， $AO \subset$ 面 PAO ， $PO \cap AO = O$ ，所以 $BC \perp$ 面 PAO ，

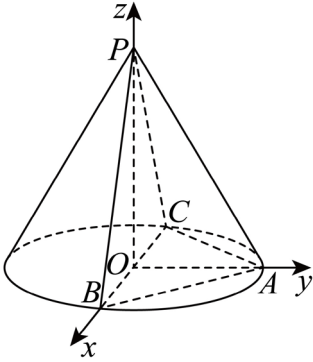
因为 $PA \subset \text{面} PAO$ ，所以 $PA \perp BC$ 。

(2) 因为 BC 为直径，故 O 为底面圆的圆心，故 $PO \perp \text{平面} BAC$ ，而 $AO \perp BC$

故可建立如图所示的空间直角坐标系，

因为圆锥侧面积为 $\sqrt{3}\pi$ ， BC 为底面直径， $BC = 2$ ，所以底面半径为 1，母线长为 $\sqrt{3}$ ，

所以 $PO = \sqrt{PA^2 - AO^2} = \sqrt{2}$ ，



则可得 $P(0,0,\sqrt{2}), A(0,1,0), B(1,0,0), C(-1,0,0)$ ，

故 $\vec{PA} = (0,1,-\sqrt{2}), \vec{PB} = (1,0,-\sqrt{2}), \vec{PC} = (-1,0,-\sqrt{2})$ ，

设 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 PAB 的法向量，则 $\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{PA} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{PB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 - \sqrt{2}z_1 = 0 \\ x_1 - \sqrt{2}z_1 = 0 \end{cases}$ ，

令 $x_1 = \sqrt{2}$ ，则 $y_1 = \sqrt{2}$ ， $z_1 = 1$ ，所以 $\vec{n}_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ 。

设 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 为平面 PAC 的法向量，

则 $\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{PA} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{PC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_2 - \sqrt{2}z_2 = 0 \\ -x_2 - \sqrt{2}z_2 = 0 \end{cases}$ ，

令 $x_2 = -\sqrt{2}$ ，则 $y_2 = \sqrt{2}$ ， $z_2 = 1$ ，所以 $\vec{n}_2 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$ 。

则 $\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{-2+2+1}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{1}{5}$ ，

设二面角 $B-PA-C$ 为 θ ，则 θ 为钝角，

所以二面角 $B-PA-C$ 的大小为 $\pi - \arccos \frac{1}{5}$ 。

19. (1) $\frac{17}{45}$

(2) 一级果抽取 6 箱，二级果抽取 2 箱

(3) 方差 1427.27 克²，平均数 285.44 克，预估平均质量为 287.69 克

【分析】(1) 利用组合知识和超几何分布求概率公式求出答案；

(2) 利用分层抽样的定义进行求解；

(3) 根据公式计算出总体样本平均质量和方差，并预估平均质量。

【详解】(1) 设 A 事件为恰好选到一级果和二级果各一箱，

样本空间的样本点的个数 $n = C_{136}^2 = \frac{136 \times 135}{2} = 9180$,

A 事件的样本点的公式 $m = C_{102}^1 \cdot C_{34}^1 = 3468$,

所以 $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3468}{9180} = \frac{17}{45}$;

(2) 因为一级果箱数: 二级果箱数 = 102: 34 = 3: 1,

所以 8 箱水果中有一级果抽取 $8 \times \frac{3}{3+1} = 6$ 箱, 二级果抽取 $8 \times \frac{1}{3+1} = 2$ 箱;

(3) 设一级果平均质量为 \bar{x} , 方差为 S_x^2 , 二级果质量为 \bar{y} , 方差为 S_y^2 ,

总体样本平均质量为 \bar{z} , 方差为 S^2 ,

因为 $\bar{x} = 303.45$, $\bar{y} = 240.41$, $S_x^2 = 603.46$, $S_y^2 = 648.21$,

所以 $\bar{z} = \frac{120}{120+48} \times 303.45 + \frac{48}{120+48} \times 240.41 = 285.44$ 克,

$S^2 = \frac{120}{120+48} \times [603.46 + (303.45 - 285.44)^2] + \frac{48}{120+48} \times [648.21 + (240.41 - 285.44)^2] = 1427.27$ 克².

预估平均质量为 $\frac{102}{136} \cdot \bar{x} + \frac{34}{136} \cdot \bar{y} = 287.69$ 克.

20. (1) $\frac{5\sqrt{6}}{3}$;

(2) $(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{10}}{5}]$;

(3) 存在, $C(-\frac{9}{4}, \frac{\sqrt{5}}{4})$

【分析】(1) 根据给定条件, 求出点 A 的纵坐标, 再利用两点间距离公式计算即得.

(2) 设 $A(x, y)$, $xy \neq 0$, 求出 S_1, S_2 , 再利用给定关系求出 y^2 的范围, 进而求出 $|OA|$ 的范围.

(3) 设 $A(x_1, y_1), y_1 > 0, B(x_2, y_2)$, 利用向量坐标运算及共线向量的坐标表示可得 $y_2 + 2y_1 = 0$, 再联立直线 AB 与椭圆方程, 结合韦达定理求解即得.

【详解】(1) 设 $A(2, y)$, 由点 A 为椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上一点, 得 $\frac{2^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$, 即 $y^2 = \frac{2}{3}$, 又 $F_1(-2, 0)$,

所以 $|AF_1| = \sqrt{[2 - (-2)]^2 + (y - 0)^2} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$.

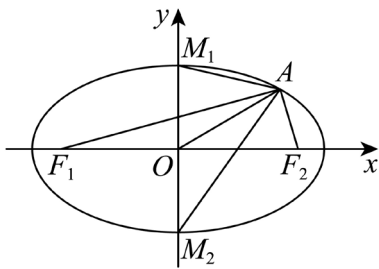
(2) 设 $A(x, y)$, $xy \neq 0$, 而 $|F_1F_2| = 4, |M_1M_2| = 2\sqrt{2}$,

则 $S_1 = \frac{1}{2}|F_1F_2||y| = 2|y|$, $S_2 = \frac{1}{2}|M_1M_2||x| = \sqrt{2}|x|$, 由 $S_1 \geq S_2$, 得 $2|y| \geq \sqrt{2}|x|$,

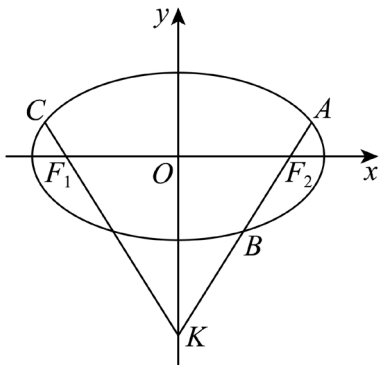
即 $2y^2 \geq x^2$, 又 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$, 则 $2y^2 \geq 6 - 3y^2$, 解得 $\frac{6}{5} \leq y^2 < 2$, $|OA| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(6 - 3y^2) + y^2} = \sqrt{6 - 2y^2} \in$

$(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{10}}{5}]$,

所以 $|OA|$ 的范围是 $(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{10}}{5}]$.



(3) 设 $A(x_1, y_1), y_1 > 0, B(x_2, y_2)$, 由图象对称性, 得 A, C 关于 y 轴对称, 则 $C(-x_1, y_1)$, 又 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$, 于是 $\overrightarrow{F_1A} = (x_1 + 2, y_1), \overrightarrow{F_1B} = (x_2 + 2, y_2), \overrightarrow{F_1C} = (-x_1 + 2, y_1)$,



则 $\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B} + \overrightarrow{F_1C} = (x_2 + 6, y_2 + 2y_1)$, 同理 $\overrightarrow{F_2A} + \overrightarrow{F_2B} + \overrightarrow{F_2C} = (x_2 - 6, y_2 + 2y_1)$,
由 $\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B} + \overrightarrow{F_1C} = \lambda(\overrightarrow{F_2A} + \overrightarrow{F_2B} + \overrightarrow{F_2C})$, 得 $(\overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{F_1B} + \overrightarrow{F_1C}) // (\overrightarrow{F_2A} + \overrightarrow{F_2B} + \overrightarrow{F_2C})$,
因此 $(x_2 + 6)(y_2 + 2y_1) = (x_2 - 6)(y_2 + 2y_1)$, 即 $12(y_2 + 2y_1) = 0$, 则 $y_2 + 2y_1 = 0$,

设直线 $AF_2: x = my + 2$, 由 $\begin{cases} x = my + 2 \\ x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases}$ 消去 x 得 $(m^2 + 3)y^2 + 4my - 2 = 0$,

$$\text{则} \begin{cases} y_1 y_2 = \frac{-2}{m^2+3} \\ y_1 + y_2 = -\frac{4m}{m^2+3} \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -2y_1^2 = \frac{-2}{m^2+3} \\ -y_1 = -\frac{4m}{m^2+3} \end{cases}, \text{而 } y_1 > 0, \text{ 解得 } m = \frac{\sqrt{5}}{5}, y_1 = \frac{\sqrt{5}}{4},$$

由 $x_1 = my_1 + 2$, 得 $x_1 = \frac{9}{4}$, 所以 $C(-\frac{9}{4}, \frac{\sqrt{5}}{4})$.

【点睛】 思路点睛: 解答直线与椭圆的题目时, 时常把两个曲线的方程联立, 消去 x (或 y) 建立一元二次方程, 然后借助根与系数的关系, 并结合题设条件建立有关参变量的等量关系; 涉及到直线方程的设法时, 务必考虑全面, 不要忽略直线斜率为 0 或不存在等特殊情形.

21. (1) $M(1) = [0, +\infty); L(1) = [-1, +\infty);$

(2) 证明见解析

(3) 证明见解析

【分析】 (1) 将 $f(x) = x^2 + 1$ 代入求解即可;

(2) 根据函数 $g(x) = x^3 - 3x^2 - a^3 + 3a^2$ 的单调性, 对 a 进行分类讨论, 然后求出 $M(a)$ 即可证明;

(3) 利用偶函数的定义, 即可证明必要性, 利用 $M(-c) = L(c)$, 得出两个集合中最小的元素相同, 从而 $f(c) = f(-c)$, 即可证明充分性.

【详解】 (1) 由题意得: $M(1) = \{t \mid t = x^2 + 1 - 2, x \geq 1\} = [0, +\infty); L(1) = \{t \mid t = x^2 + 1 - 2, x \leq 1\} = [-1, +\infty);$

(2) 由题意知 $M(a) = \{t \mid t = x^3 - 3x^2 - a^3 + 3a^2, x \geq a\}$, 记 $g(x) = x^3 - 3x^2 - a^3 + 3a^2$, 有 $g'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ 或 2 ,

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$g'(x)$	正	0	负	0	正
$g(x)$	\nearrow	极大值	\searrow	极小值	\nearrow

现对 a 分类讨论:

当 $a \geq 2$, 有 $t = x^3 - 3x^2 - a^3 + 3a^2$, $x \geq a$ 为严格增函数, 因为 $g(a) = 0$, 此时 $M(a) = [0, +\infty) \subseteq [-4, +\infty)$, 符合条件;

当 $0 \leq a < 2$ 时, $t = x^3 - 3x^2 - a^3 + 3a^2$, $x \geq a$, 先减后增, $t_{\min} = g(2) = -a^3 + 3a^2 - 4$,

因为 $-a^3 + 3a^2 = a^2(3 - a) \geq 0$ ($a = 0$ 取等号), 所以 $t_{\min} = g(2) = -a^3 + 3a^2 - 4 \geq -4$,

此时 $M(a) = [-a^3 + 3a^2 - 4, +\infty) \subseteq [-4, +\infty)$, 符合条件, 且 $a = 0$ 时, $-4 \in M(a)$;

当 $a < 0$ 时, $t = x^3 - 3x^2 - a^3 + 3a^2$, $x \geq a$, 在 $[a, 0)$ 严格增, 在 $[0, 2]$ 严格减, 在 $[2, +\infty)$ 严格增,

$t_{\min} = \min\{g(a), g(2)\} = \min\{0, -a^3 + 3a^2 - 4\}$, 因为 $h(a) = -a^3 + 3a^2 - 4$,

此时, $h'(a) = -3a^2 + 6a > 0$, 则 $h(a) > h(0) = -4$, 则 $M(a) = [t_{\min}, +\infty) \subseteq [-4, +\infty)$ 成立;

综上所述, 对于任意 $a \in \mathbb{R}$, 都有 $M(a) \subseteq [-4, +\infty)$, 且存在 $a = 0$, 使得 $-4 \in M(a)$.

(3) 必要性: 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $M(-c) = \{t \mid t = f(x) - f(-c), x \geq -c\}$, $L(c) = \{t \mid t = f(x) - f(c), x \leq c\}$,

当 $x \geq -c$, $t = f(x) - f(-c) = f(-x) - f(c)$, 因为 $-x \leq c$, 故 $M(-c) = L(c)$;

充分性: 若对于任意正实数 c , 均有 $M(-c) = L(c)$, 其中 $M(-c) = \{t \mid t = f(x) - f(-c), x \geq -c\}$, $L(c) = \{t \mid t = f(x) - f(c), x \leq c\}$,

因为 $f(x)$ 有最小值, 不妨设 $f(a) = f(x)_{\min} = m$,

由于 c 任意, 令 $c \geq |a|$, 则 $a \in [-c, c]$,

故 $M(-c)$ 最小元素为 $f(a) - f(-c) = m - f(-c)$, $L(c)$ 中最小元素为 $m - f(c)$,

又 $M(-c) = L(c)$, 则 $m - f(c) = m - f(-c)$ 对任意 $c \geq |a|$ 成立, 则 $f(a) = f(-a) = m$,

若 $a = 0$, 则 $f(c) = f(-c)$ 对任意 $c \geq 0$ 成立 $\Rightarrow f(x)$ 是偶函数,

若 $a \neq 0$, 此后取 $c \in (-|a|, |a|)$,

$M(-c)$ 最小元素是 $f(|a|) - f(-c)$
 $L(-c)$ 最小元素是 $f(-|a|) - f(c)$ $\Rightarrow f(-c) = f(c)$,

综上, 任意 $c \geq 0$, $f(c) = f(-c)$, 即 $f(x)$ 是偶函数.

故 " $f(x)$ 是偶函数" 的充要条件是 "对于任意正实数 c , 均有 $M(-c) = L(c)$ ".

【点睛】关键点点睛: 第二问利用导数求出函数的单调性, 然后对 a 进行分类讨论求出函数的值域, 第三问结合函数的奇偶性考察逻辑推理能力.