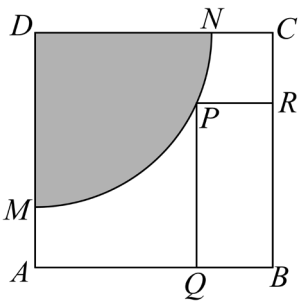


2025 年上海春季高考练习数学试题

一、填空题

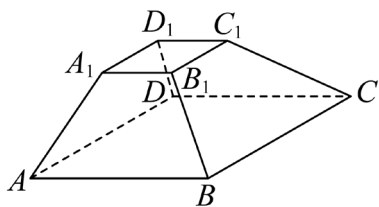
1. 已知集合 $A = \{x|x > 0\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B$ 等于_____.
2. 不等式 $\frac{x}{x-1} < 0$ 的解集为_____.
3. 已知复数 $z = \frac{2+i}{i}$, 其中 i 为虚数单位, 则 $|z| =$ _____.
4. 已知 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (1, x)$, 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $x =$ _____.
5. 已知 $\tan \alpha = 1$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) =$ _____.
6. 已知 $\left(x + \frac{m}{x}\right)^6$ 的展开式中常数项为 20, 则实数 m 的值为_____.
7. 已知 $\{a_n\}$ 是首项为 1、公差为 1 的等差数列, $\{b_n\}$ 是首项为 1、公比为 $q (q > 0)$ 的等比数列. 若数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前三项和为 2, 则 $q =$ _____.
8. 关于 x 的方程 $|x - 1| + |\pi - x| = \pi - 1$ 的解集为_____.
9. 已知 P 是一个圆锥的顶点, PA 是母线, $PA = 2$, 该圆锥的底面半径是 1. B, C 分别在圆锥的底面上, 则异面直线 PA 与 BC 所成角的最小值为_____.
10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{6-a^2} = 1 (a > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 通过 F_2 且倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线与双曲线交于第一象限的点 A , 延长 AF_2 至 B 使得 $AB = AF_1$. 若 $\triangle BF_1F_2$ 的面积为 $3\sqrt{6}$, 则 a 的值为_____.
11. 如图所示, 正方形 $ABCD$ 是一块边长为 4 的工程用料, 阴影部分所示是被腐蚀的区域, 其余部分完好, 曲线 MN 为以 AD 为对称轴的抛物线的一部分, $DM = DN = 3$. 工人师傅现要从完好的部分中截取一块矩形原料 $BQPR$, 当其面积有最大值时, AQ 的长为_____.



12. 在平面中, \vec{e}_1 和 \vec{e}_2 是互相垂直的单位向量, 向量 \vec{a} 满足 $|\vec{a} - 4\vec{e}_1| = 2$, 向量 \vec{b} 满足 $|\vec{b} - 6\vec{e}_2| = 1$, 求 \vec{b} 在 \vec{a} 方向上的数量投影的最大值_____.

二、单选题

13. 如图, $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱台, 则下列各组直线中属于异面直线的是 ().



- A. AB 和 C_1D_1 ; B. AA_1 和 CC_1 ; C. BD_1 和 B_1D ; D. A_1D_1 和 AB .

14. 幂函数 $y = x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 上是严格减函数, 且经过 $(-1, -1)$, 则 a 的值可能是 ().

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 3

15. 有一四边形 $ABCD$, 对于其四边 AB 、 BC 、 CD 、 DA , 按顺序分别抛掷一枚质量均匀的硬币: 如硬币正面朝上, 则将其擦去; 如硬币反面朝上, 则不擦去. 最后, 以 A 为起点沿着尚未擦去的边出发, 可以到达 C 点的概率为 ().

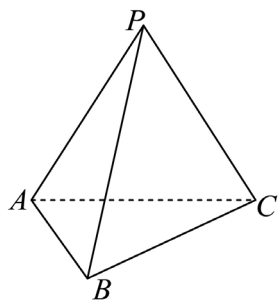
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{7}{16}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{16}$

16. 已知 $a \in \mathbb{R}$, 不等式 $[\tan(\frac{\pi}{6}x) - a][\tan(\frac{\pi}{6}x) - a - 1] < 0$ 在 $(0, 2025)$ 中的整数解有 m 个. 关于 m 的个数, 以下不可能的是 ().

- A. 0 B. 338 C. 674 D. 1012

三、解答题

17. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , $PA = AC = CP = 2$, $AB = BC = \sqrt{2}$,



(1)若 O 是棱 AC 的中点, 证明: $BO \perp$ 平面 PAC , 并求三棱锥 $B-OPA$ 的体积;

(2)求二面角 $B-PC-A$ 的大小.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 且 $c = 5$.

(1)若 $\frac{a}{4b} = \frac{\sin B}{\sin A}$, $C = \frac{\pi}{2}$, 求 a ;

(2)若 $ab = 20$, 求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值.

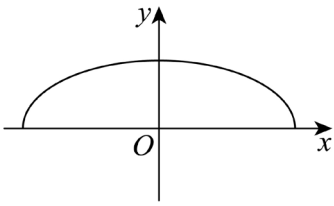
19. 甲、乙是两个体育社团的小组. 如下是两组组员身高的茎叶图(单位: 厘米), 以身高的百位数和十位数作为“茎”排列在中间、个位数作为“叶”分列在两边.

甲队		乙队	
	15	9	
7 7 5 5 4	16	0 3 5 5 6 7 8 8	
8 5 4 3 2 2	17	2	
3	18		

甲、乙两小组组员身高分布茎叶图

- (1)分别求甲、乙两组组员身高的第 60 百分位数；
- (2)从甲、乙两组各选取一个组员，求两人身高均在 170 厘米以上的概率；
- (3)为使两组人数相同，从甲组中调派一个队员到乙组. 是否存在甲组的一个组员，将他调派至乙组后，甲、乙两组的平均身高都增大？

20. 在平面直角坐标系中，已知曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (y \geq 0)$ ，点 P 、 Q 分别为 Γ 上不同的两点， $T(t, 0)$.



- (1)求 Γ 所在椭圆的离心率；
- (2)若 $T(1,0)$, Q 在 y 轴上，若 T 到直线 PQ 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，求 P 的坐标；
- (3)是否存在 t ，使得 $\triangle TPQ$ 是以 T 为直角顶点的等腰直角三角形？若存在，求 t 的取值范围；若不存在，请说明理由.

21. 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域是 D . 对于 $t \in D$ ，定义集合 $S_{f(t)} = \{x | f(x) \geq f(t)\}$.

- (1) $f(x) = \log_2 x$ ，求 $S_{f(16)}$ ；
- (2)对于集合 A ，若对任意 $x \in A$ 都有 $-x \in A$ ，则称 A 是对称集. 若 D 是对称集，证明：“函数 $y = f(x)$ 是偶函数”的充要条件是“对任意 $t \in D$ ， $S_{f(t)}$ 是对称集”；
- (3)若 $x \in \mathbb{R}$ ， $f(x) = e^x - \frac{1}{2}mx^2$. 求 m 的取值范围，使得对于任意 $t_1 < t_2 \in D$ ，都有 $S_{f(t_2)} \subseteq S_{f(t_1)}$.

《2025 年上海春季高考练习数学试题》参考答案

题号	13	14	15	16						
答案	D	B	B	D						

1. 1,2

【详解】试题分析： $A \cap B = \{x | x > 0\} \cap \{-1, 0, 1, 2\} = \{1, 2\}$

考点：集合运算

【方法点睛】1.用描述法表示集合，首先要弄清集合中代表元素的含义，再看元素的限制条件，明确集合类型，是数集、点集还是其他的集合.

2. 求集合的交、并、补时，一般先化简集合，再由交、并、补的定义求解.

3. 在进行集合的运算时要尽可能地借助 Venn 图和数轴使抽象问题直观化. 一般地，集合元素离散时用 Venn 图表示；集合元素连续时用数轴表示，用数轴表示时要注意端点值的取舍.

2. (0,1)

【分析】将不等式 $\frac{x}{x-1} < 0$ 化为 $x(x-1) < 0$ ，即可得答案.

【详解】由题意得不等式 $\frac{x}{x-1} < 0$ 即 $x(x-1) < 0$ ， $\therefore x \in (0, 1)$ ，

即不等式 $\frac{x}{x-1} < 0$ 的解集为 $(0, 1)$ ，

故答案为：(0,1)

3. $\sqrt{5}$

【分析】根据复数的除法运算和复数模的计算公式即可.

【详解】 $z = \frac{2+i}{i} = \frac{i(2+i)}{i^2} = 1 - 2i$ ，

故 $|z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.

故答案为： $\sqrt{5}$.

4. $\frac{1}{2}$ /0.5

【分析】由平面向量共线的坐标表示即可求解.

【详解】由 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 得 $2x - 1 = 0$ ，解得 $x = \frac{1}{2}$.

故答案为： $\frac{1}{2}$.

5. 0

【分析】利用同角三角函数关系和余弦的两角和公式求解即可.

【详解】由 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1$ 可得 $\sin \alpha = \cos \alpha$ ，

所以 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) = 0$ ，

故答案为: 0

6. 1

【分析】根据二项式展开式的通项特征可得 $C_6^3 m^3 = 20$, 进而可求解.

【详解】展开式的通项为 $C_6^r x^{6-r} \left(\frac{m}{x}\right)^r = C_6^r m^r x^{6-2r}$, 令 $6-2r=0$ 解得 $r=3$, $\therefore C_6^3 m^3 = 20$.

$\therefore m = 1$.

故答案为: 1

7. $\frac{1}{3}$

【分析】写出通项公式, 得到 $a_n \cdot b_n = nq^{n-1}$, 从而根据前三项和得到方程, 求出公比.

【详解】由题意得 $a_n = 1 + n - 1 = n$, $b_n = q^{n-1}$,

则 $a_n \cdot b_n = nq^{n-1}$, 所以前三项和为 $1 + 2q + 3q^2 = 2$,

解得 $q = \frac{1}{3}$ 或 -1 (舍去),

故答案为: $\frac{1}{3}$

8. $[1, \pi]$

【分析】根据 x 的取值范围去绝对值, 分类讨论解方程即可.

【详解】 $|x-1| + |\pi-x| = \begin{cases} x-1+x-\pi, x \geq \pi \\ \pi-1, 1 < x < \pi \\ 1-x+\pi-x, x \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1-\pi, x \geq \pi \\ \pi-1, 1 < x < \pi \\ 1+\pi-2x, x \leq 1 \end{cases}$.

当 $x \geq \pi$ 时, 令 $2x-1-\pi = \pi-1$ 得 $x = \pi$;

当 $1 < x < \pi$ 时, $|x-1| + |\pi-x| = \pi-1$ 恒成立;

当 $x \leq 1$ 时, 令 $1+\pi-2x = \pi-1$ 得 $x = 1$.

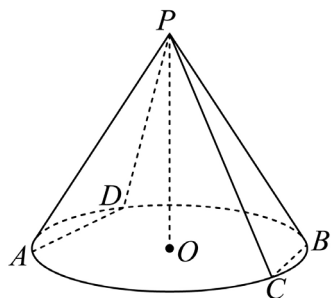
综上所述, 方程 $|x-1| + |\pi-x| = \pi-1$ 的解集为 $[1, \pi]$.

故答案为: $[1, \pi]$.

9. $\frac{\pi}{3}$

【分析】过 A 作 $AD \parallel BC$ 交底面圆锥于 D 点, 则 $\angle PAD$ 为异面直线 PA 与 BC 所成角, 结合余弦定理与余弦函数的性质即可得 $\angle PAD$ 的取值范围, 从而得所求最值.

【详解】



如图, 过A作 $AD \parallel BC$ 交底面圆锥于D点, 连接PD,

因为 $PA = PD, AD \parallel BC$, 则 $\angle PAD$ 为异面直线PA与BC所成角,

$$\text{所以 } \cos \angle PAD = \frac{|PA|^2 + |AD|^2 - |PD|^2}{2|PA| \cdot |AD|} = \frac{2^2 + |AD|^2 - 2^2}{4|AD|} = \frac{|AD|}{4},$$

又 $0 < |AD| \leq 2$, 所以 $0 < \frac{|AD|}{4} \leq \frac{1}{2}$, 即 $0 < \cos \angle PAD \leq \frac{1}{2}$,

因为 $\angle PAD \in (0, \frac{\pi}{2})$, 函数 $y = \cos \alpha$ 在 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 所以 $\frac{\pi}{3} \leq \angle PAD < \frac{\pi}{2}$,

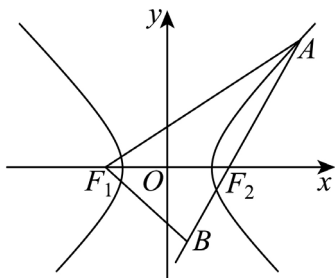
故异面直线PA与BC所成角的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.

故答案为: $\frac{\pi}{3}$.

10. $\sqrt{3}$

【分析】由题意作图, 根据三角形面积公式以及直线方程, 结合双曲线的标准方程, 可得答案.

【详解】由题意可作图如下:



由 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{6-a^2} = 1$, 则 $b^2 = 6 - a^2 > 0$, 解得 $0 < a < \sqrt{6}$, 且 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6}$,

则 $F_1(-\sqrt{6}, 0), F_2(\sqrt{6}, 0)$,

设 $B(x_B, y_B)$, 则 $S_{\triangle BF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot |y_B| \cdot |F_1F_2| = \sqrt{6}|y_B| = 3\sqrt{6}$, 解得 $y_B = -3$,

由题意可得直线AB的斜率 $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, 则方程为 $y = \sqrt{3}(x - \sqrt{6})$,

将 $y_B = -3$ 代入上式, 则 $-3 = \sqrt{3}(x_B - \sqrt{6})$, 解得 $x_B = \sqrt{6} - \sqrt{3}$,

由题意可得 $|AF_1| - |AF_2| = |AB| - |AF_2| = |BF_2| = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{6})^2 + (-3 - 0)^2} = 2\sqrt{3}$,

易知 $a = \sqrt{3}$.

故答案为: $\sqrt{3}$.

11. $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$

【分析】建立平面直角坐标系如图所示, 由已知求出抛物线方程, 当 $AQ \geq 3$ 时, 矩形面积最大时为4, 当 $0 < AQ < 3$,

设 $AQ = x (0 < x < 3)$, 即可得到S关于x的函数式, 利用求导判断单调性, 即可得到最值.

【详解】由题知, 以A为原点, 建立平面直角坐标系, 如图,

则 $M(0,1), N(3,4)$, 设MN方程为: $y = ax^2 + b$,

所以 $\begin{cases} 0 + b = 1 \\ 9a + b = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 \end{cases}$, MN 方程为: $y = \frac{1}{3}x^2 + 1$,

令矩形 $BQPR$ 面积为 S ,

当 $AQ \geq 3$ 时, $S \leq S_{BQNC} = 1 \times 4 = 4$,

当 $0 < AQ < 3$, 设 $AQ = x (0 < x < 3)$, 则 $P(x, \frac{1}{3}x^2 + 1)$,

所以 $S = (4 - x)(\frac{1}{3}x^2 + 1) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - x + 4$,

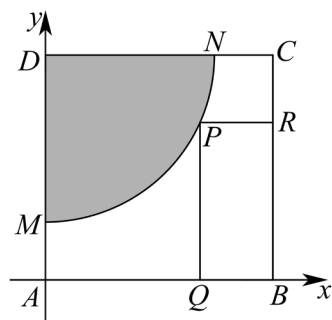
则 $S' = -x^2 + \frac{8}{3}x - 1 = -\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{7}{9}$,

令 $S' > 0$, 则 $\frac{4-\sqrt{7}}{3} < x < \frac{4+\sqrt{7}}{3}$, S 在 $(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3})$ 上递增,

令 $S' < 0$, 则 $x > \frac{4+\sqrt{7}}{3}$ 或 $x < \frac{4-\sqrt{7}}{3}$, S 在 $(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty)$, $(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3})$ 上递减,

又 $0 < x < 3$, $S(0) = 4$, $S(\frac{4+\sqrt{7}}{3}) = \frac{344+14\sqrt{7}}{81} > 4$,

所以当 AQ 的长为 $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ 时, 该矩形面积最大.



故答案为: $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$

12. 4

【分析】 设 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 根据题意, 求得 A, B 所在圆的圆心和半径; 再根据数量投影的意义, 数形结合即可求得结果.

【详解】 根据题意不妨设 $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$, $\vec{a} = (x, y)$, $\vec{b} = (m, n)$,

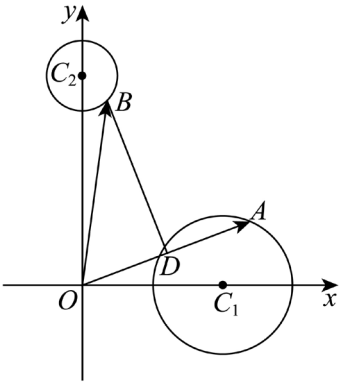
则 $\vec{a} - 4\vec{e}_1 = (x - 4, y)$, $\vec{b} - 6\vec{e}_2 = (m, n - 6)$,

由 $|\vec{a} - 4\vec{e}_1| = 2$ 可得 $(x - 4)^2 + y^2 = 4$, 由 $|\vec{b} - 6\vec{e}_2| = 1$ 可得 $m^2 + (n - 6)^2 = 1$;

设 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 故 A 在以 $C_1(4, 0)$ 为圆心, 2 为半径的圆上;

B 在以 $C_2(0, 6)$ 为圆心, 1 为半径的圆上;

过 B 作 $BD \perp OA$ 于 D , 则 OD 即为 \vec{b} 在 \vec{a} 上的数量投影, 如下所示:

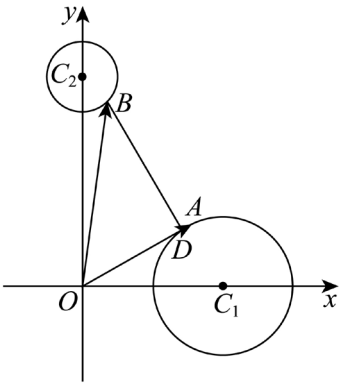


因为 A, B 分别为两圆上任意动点, 不妨固定 B , 则 OB 为定长,

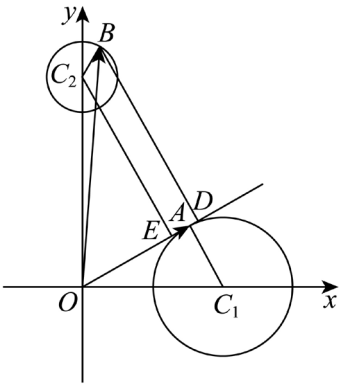
设 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \theta$, 即 $\angle AOB = \theta$, 故 $|OD| = |OB| \cdot \cos\theta$,

因为此时 $|OB|$ 为定长, 且 $\theta = \angle AOB < 180^\circ$,

故随着 θ 的减小, $\cos\theta$ 增大, 直至 OA 恰好与圆 C_1 相切时, $|OD|$ 取得最大值, 如下所示:



在 OA 与圆 C_1 相切的基础上, 移动点 B , 过 C_2 作 $C_2E \perp OA$ 于 E , 故 $|OD| = |OE| + |ED|$;

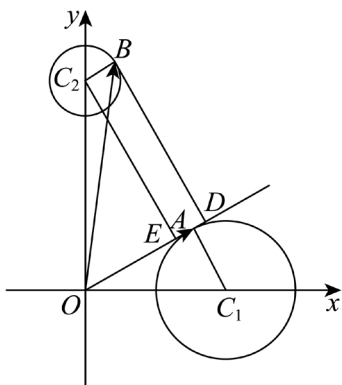


在 $\triangle C_1AO$ 中, $\angle C_1AO = 90^\circ$, $C_1A = 2$, $OC_1 = 4$,

故 $\angle AOC_1 = 30^\circ$, $\angle C_2OE = 60^\circ$, 因为 $|OC_2| = 6$,

故在直角三角形 C_2OE 中, $|OC_2| = 2|OE|$, 则 $OE = 3$, 即 $|OD| = |OE| + |ED| = 3 + |ED|$;

在四边形 $BDEC_2$ 中, 因为 $\angle DEC_2 = \angle C_2ED = 90^\circ$, 故 $|DE| \leq |BC_2| = 1$,



当且仅当 $BC_2 // DE$ 时等号成立，从而 $|OD| = 3 + |ED| \leq 3 + 1 = 4$.

综上所述： \vec{b} 在 \vec{a} 方向上的数量投影的最大值为 4.

故答案为：4.

【点睛】 关键点点睛：处理本题的关键，一是熟悉数量投影的几何意义；二是对两个运动的点 A, B ，采用一定一动的处理策略，从而求解最大值.

13. D

【分析】 根据棱台的性质及直线与直线的位置关系即可判断.

【详解】 因为 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱台，所以 $AB // A_1B_1 // C_1D_1$ ，故 A 错误，

侧棱延长交于一点，所以 AA_1 与 CC_1 相交，故 B 错误，

同理 BB_1 与 DD_1 也相交，所以 B, B_1, D_1, D 四点共面，所以 BD_1 与 B_1D 相交，故 C 错误，

A_1D_1 与 AB 是异面直线，故 D 正确.

故选：D

14. B

【分析】 根据幂函数的单调性可排除 C 和 D；根据幂函数过点 $(-1, -1)$ ，可排除 A.

【详解】 因为幂函数 $y = x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 上是严格减函数，所以 $a < 0$ ，故 C 错误，D 错误；

对于 A，若 $a = -\frac{2}{3}$ ，则 $y = x^{-\frac{2}{3}}$ ，当 $x = -1$ 时， $y = (-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-1)^2}} = 1$ ，

所以幂函数 $y = x^{-\frac{2}{3}}$ 过点 $(-1, 1)$ ，故 A 错误；

对于 B，若 $a = -\frac{1}{3}$ ，则 $y = x^{-\frac{1}{3}}$ ，当 $x = -1$ 时， $y = (-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{(-1)^{\frac{1}{3}}} = -1$ ，

所以幂函数 $y = x^{-\frac{1}{3}}$ 过点 $(-1, -1)$ ，故 B 正确.

故选：B.

15. B

【分析】 根据分步计数原理及古典概型的概率公式求解即可.

【详解】 根据题意，对于其四边 AB, BC, CD, DA ，按顺序分别抛掷一枚质量均匀的硬币，共有 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 种情况，

要从 A 出发沿着尚未擦去的边能到达点 C ,

若保留 AB, BC 两条边, 则 CD, DA 可保留也可擦去,

共有 $2 \times 2 = 4$ 种情况;

若保留 AD, DC 两条边, 则 AB, BC 可保留也可擦去,

共有 $2 \times 2 - 1 = 3$ 种情况 (其中有一种情况与上面重复),

则要从 A 出发沿着尚未擦去的边能到达点 C , 共有 7 种情况,

所以可以到达 C 点的概率为 $\frac{7}{16}$.

故选: B.

16. D

【分析】由题设可得 $a < \tan\left(\frac{\pi}{6}x\right) < a + 1$, 结合正切函数的周期分 $a \leq -\sqrt{3}$ 或 $a \geq \sqrt{3}$ 时, 和 $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$ 两种情况讨论求解即可.

【详解】由 $\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right) - a\right]\left[\tan\left(\frac{\pi}{6}x\right) - a - 1\right] < 0$, 即 $a < \tan\left(\frac{\pi}{6}x\right) < a + 1$,

对于 $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{6}x\right)$, 周期为 $T = 6$,

且 $f(0) = 0, f(1) = \frac{\sqrt{3}}{3}, f(2) = \sqrt{3}, f(4) = -\sqrt{3}, f(5) = -\frac{\sqrt{3}}{3}, f(6) = 0$,

当 $a \leq -\sqrt{3}$ 或 $a \geq \sqrt{3}$ 时, 不等式 $a < \tan\left(\frac{\pi}{6}x\right) < a + 1$ 在 $(0, 2025)$ 中无整数解;

当 $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$ 时, 若不等式 $a < \tan\left(\frac{\pi}{6}x\right) < a + 1$ 有在 $(0, 6]$ 内只有 1 个整数解,

比如 $a = 1$ 时, 此时在 $(0, 6]$ 内的整数解为 $x = 2$,

而 $2025 = 6 \times 337 + 3$,

则在 $(0, 2025)$ 中可能有 $337 + 1 = 338$ 个整数解;

若不等式 $a < \tan\left(\frac{\pi}{6}x\right) < a + 1$ 有在 $(0, 6]$ 内只有 2 个整数解,

比如 $a = -0.9$ 时, 此时在 $(0, 6]$ 内的整数解为 $x = 5$ 或 $x = 6$,

则在 $(0, 2025)$ 中可能有 $337 \times 2 = 674$ 个整数解;

由于 $\left|\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right| < 1, \left|\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| > 1, \left|-\sqrt{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right| > 1, \left|-\frac{\sqrt{3}}{3} - (-1)\right| < 1$,

则在 $(0, 6]$ 内最多只有 2 个整数解, 因此在 $(0, 2025)$ 中不可能有 1012 个整数解.

故选: D.

17. (1) 证明过程见解析, 体积为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(2) $\arccos \frac{\sqrt{21}}{7}$

【分析】(1) 作出辅助线, 得到线线垂直, 根据面面垂直, 得到线面垂直, 并利用锥体体积公式求出答案;

(2) 证明出 OB, OC, OP 两两垂直, 建立空间直角坐标系, 求出两个平面的法向量, 求出 $\cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{21}}{7}$,

进而求出二面角 $B-PC-A$ 的大小.

【详解】(1) 连接 BO , 因为 $AB = BC = \sqrt{2}$, 所以 $BO \perp AC$,

因为平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , 交线为 AC ,

$BO \subset$ 平面 ABC ,

所以 $BO \perp$ 平面 PAC ,

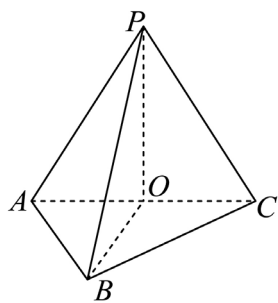
因为 $PA = AC = CP = 2$, 所以 $PO \perp AC$, $AO = 1$, $PO = \sqrt{AP^2 - AO^2} = \sqrt{3}$,

故 $S_{\triangle OPA} = \frac{1}{2} OP \cdot AO = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$AB = \sqrt{2}$, 由勾股定理得 $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{2 - 1} = 1$,

又 $BO \perp$ 平面 PAC ,

三棱锥 $B-OPA$ 的体积 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle OPA} \cdot BO = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$;



(2) 由 (1) 知, $BO \perp$ 平面 PAC , $OC, OP \subset$ 平面 PAC ,

所以 $BO \perp OC$, $BO \perp OP$, 又 $PO \perp AC$, 故 OB, OC, OP 两两垂直,

以 O 为坐标原点, OB, OC, OP 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系,

则 $B(1, 0, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), C(0, 1, 0), A(0, -1, 0)$,

$\vec{BP} = (-1, 0, \sqrt{3}), \vec{PC} = (0, 1, -\sqrt{3})$,

设平面 BPC 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{BP} = (x, y, z) \cdot (-1, 0, \sqrt{3}) = -x + \sqrt{3}z = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{PC} = (x, y, z) \cdot (0, 1, -\sqrt{3}) = y - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}$$

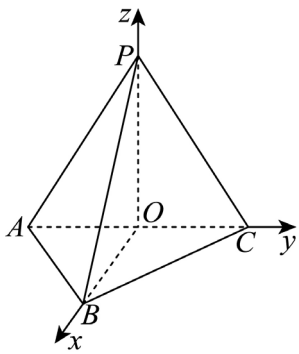
令 $z = 1$ 得 $x = y = \sqrt{3}$, 故 $\vec{m} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$,

又平面 PCA 的一个法向量为 $\vec{n} = (1, 0, 0)$,

$$\text{故} \cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1) \cdot (1, 0, 0)}{\sqrt{3+3+1}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

由图可知, 二面角 $B-PC-A$ 为锐角,

故二面角 $B-PC-A$ 的大小为 $\arccos \frac{\sqrt{21}}{7}$.



18. (1) $a = 2\sqrt{5}$

(2) $\frac{5\sqrt{55}}{4}$

【分析】(1) 由正弦定理角化边结合勾股定理求解即可；

(2) 由三角形的面积公式结合余弦定理求解即可；

【详解】(1) 由正弦定理可得 $\frac{a}{4b} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a}$, 即 $a = 2b$,

又 $C = \frac{\pi}{2}$, 所以 $a^2 + b^2 = c^2 = 25$, 即 $5b^2 = 25$, 解得 $b = \sqrt{5}$,

所以 $a = 2\sqrt{5}$.

(2) 因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = 10\sin C$, 且 $ab = 20$, $c = 5$,

所以 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \geq \frac{2ab - 25}{2ab} = \frac{3}{8}$, 当且仅当 $a = b = 2\sqrt{5}$ 时等号成立,

当 $\cos C$ 取最小值时, $\sin C$ 取最大值, 最大值 $(\sin C)_{\max} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{8}$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $\frac{5\sqrt{55}}{4}$.

19. (1) 甲组第 60 百分位数为 173 厘米, 乙组第 60 百分位数为 166.5 厘米;

(2) $\frac{7}{120}$;

(3) 把甲组的其中一个 167 厘米的组员调到乙组.

【分析】(1) 直接利用百分位数计算公式即可；

(2) 根据组合公式和古典概率公式计算即可；

(3) 求出两者平均数, 则所谓的人员身高应该两平均数之间 (不包括两平均数).

【详解】(1) 甲队: $i = 12 \times 60\% = 7.2$,

所以甲组的第 60 百分位数为从小到大排列的第 8 位组员身高, 为 173 厘米;

乙队: $i = 10 \times 60\% = 6$,

所以乙组的第 60 百分位数为从小到大排列第 6 位和第 7 位组员身高的平均数, 为 $\frac{166+167}{2} = 166.5$ 厘米.

(2) 记甲乙两队各选取一名组员, 两人身高均在 170 厘米以上为事件 A,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_7^1 \cdot C_1^1}{C_{12}^1 \cdot C_{10}^1} = \frac{7}{120}.$$

$$(3) \bar{x}_{\text{甲}} = \frac{167 \times 2 + 165 \times 2 + 164 + 178 + 175 + 174 + 173 + 172 \times 2 + 183}{12} = 171.25,$$

$$\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{159 + 160 + 163 + 165 \times 2 + 166 + 167 + 168 \times 2 + 172}{10} = 165.3$$

要使两组平均身高都增大，

则从甲组调到乙组的组员身高应在两平均数之间（不包括端点平均数），所以把甲组的其中一个 167 厘米的组员调到乙组即可。

20. (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(2) $P(2,0)$;

(3) 存在, $t \in \left[-\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right]$.

【分析】(1) 根据椭圆方程直接求离心率；

(2) 问题化为以 $T(1,0)$ 为圆心， $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 为半径的圆与过 $Q(0,1)$ 的直线相切，且切线与 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (y \geq 0)$ 有交点，设切线方程，利用与圆相切关系求参数，进而确定 P 的坐标；

(3) 设 $PQ: y = kx + m$, $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 联立椭圆方程，结合韦达定理、判别式得 $\sqrt{4k^2 + 1} > m > 2|k| \geq 0$, 注意讨论 $k = 0, k \neq 0$, 确定 PQ 中点为 $A\left(-\frac{4km}{1+4k^2}, \frac{m}{1+4k^2}\right)$, 再结合 $k_{TA} = -\frac{1}{k}, \overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{TQ} = 0$ 求参数范围.

【详解】(1) 由 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (y \geq 0)$, 则 $a = 2, c = \sqrt{3}$, 即离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(2) 由题设，问题化为以 $T(1,0)$ 为圆心， $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 为半径的圆与过 $Q(0,1)$ 的直线相切，

且切线与 $\Gamma: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (y \geq 0)$ 有交点，显然切线斜率存在，令切线为 $y = nx + 1$,

所以 $\frac{|n+1|}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 可得 $2n^2 + 5n + 2 = (2n+1)(n+2) = 0$, 则 $n = -\frac{1}{2}$ 或 $n = -2$,

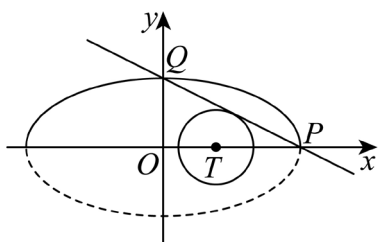
当 $n = -\frac{1}{2}$, 则切线为 $y = -\frac{1}{2}x + 1$, 联立 $x^2 + 4y^2 = 4$, 可得 $x^2 - 2x = 0$,

则 $x = 0$ 或 $x = 2$, 故此时 $P(2,0)$, 满足;

当 $n = -2$, 则切线为 $y = -2x + 1$, 联立 $x^2 + 4y^2 = 4$, 可得 $17x^2 - 16x = 0$,

则 $x = 0$ 或 $x = \frac{16}{17}$, 故此时 $P\left(\frac{16}{17}, -\frac{15}{17}\right)$, 不满足;

综上, $P(2,0)$.



(3) 由题设, 直线PQ的斜率存在, 可设PQ: $y = kx + m$, $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

联立 $x^2 + 4y^2 = 4$, 整理得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$,

其中 $\Delta = 64k^2m^2 - 16(m^2 - 1)(1 + 4k^2) = 64k^2 - 16m^2 + 16 > 0$, 即 $4k^2 > m^2 - 1$,

所以 $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1+4k^2}$, $x_1x_2 = \frac{4(m^2-1)}{1+4k^2}$, 则 $y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = \frac{2m}{1+4k^2} > 0$,

$y_1y_2 = k^2x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{4k^2m^2 - 4k^2}{1+4k^2} - \frac{8k^2m^2}{1+4k^2} + m^2 = \frac{m^2 - 4k^2}{1+4k^2} \geq 0$,

所以 $m^2 \geq 4k^2$ 且 $m > 0$, 故 $\sqrt{4k^2 + 1} > m > 2|k| \geq 0$,

当 $k = 0$ 时, 则 $y_1 = y_2 = m$ 且 $|x_1| = |x_2| = m$, 则 $m = \frac{2\sqrt{5}}{5} \in (0, 1)$, 此时 $T(0, 0)$, 满足;

当 $k \neq 0$, 而PQ的中点为 $A(-\frac{4km}{1+4k^2}, \frac{m}{1+4k^2})$, 又 $T(t, 0)$,

则 $k_{TA} = \frac{\frac{m}{1+4k^2} - 0}{-\frac{4km}{1+4k^2} - t} = -\frac{1}{k}$, 即 $t = -\frac{3km}{1+4k^2}$,

且 $\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{TQ} = (x_1 - t)(x_2 - t) + y_1y_2 = x_1x_2 - t(x_1 + x_2) + t^2 + y_1y_2 = 0$,

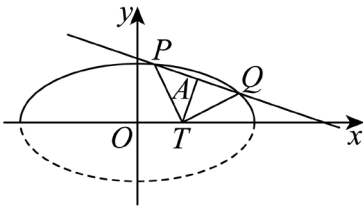
$\frac{4(m^2-1)}{1+4k^2} + \frac{8kmt}{1+4k^2} + t^2 + \frac{m^2-4k^2}{1+4k^2} = \frac{5m^2-4k^2-4}{1+4k^2} + \frac{8kmt}{1+4k^2} + t^2 = 0$,

所以 $5m^2 - 4k^2 - 4 + 8kmt + (1 + 4k^2)t^2 = 0$, 则 $5m^2(1 + k^2) = 4(4k^4 + 5k^2 + 1)$,

所以 $m^2 = \frac{4}{5}(4k^2 + 1)$, 则 $\frac{4}{5}(4k^2 + 1) \geq 4k^2 \Rightarrow 0 < k^2 \leq 1$, 故 $t^2 = \frac{9k^2m^2}{(1+4k^2)^2} = \frac{36}{\frac{5}{k^2} + 20}$

所以 $t^2 \in (0, \frac{36}{25}]$, 则 $t \in [-\frac{6}{5}, 0) \cup (0, \frac{6}{5}]$.

综上, $t \in [-\frac{6}{5}, \frac{6}{5}]$.



【点睛】关键点点睛: 第三问, 设PQ: $y = kx + m$, $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 根据已知得到 $\sqrt{4k^2 + 1} > m > 2|k| > 0$,

且 $k_{TA} = -\frac{1}{k}$, $\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{TQ} = 0$ 的应用为关键

21. (1) $\{x|x \geq 16\}$

(2)证明见详解

(3) $[0, e]$

【分析】(1) 根据对数函数的单调性即可求解;

(2) 根据偶函数的定义和对称集的定义即可证明必要性和充分性;

(3) 根据定义判断出函数单调不减, 得到导函数大于等于0恒成立即可求解.

【详解】(1) 由定义得, $S_{f(16)} = \{x|f(x) \geq f(16)\} = \{x|\log_2 x \geq \log_2 16\} = \{x|x \geq 16\}$.

(2) 证明:

必要性：因为函数 $y = f(x)$ 是偶函数，所以对任意 $x \in D$ ， $f(x) = f(-x)$ ，

对任意 $t \in D$ ，若 $x \in S_{f(t)}$ ，即 $f(x) \geq f(t)$ ，则 $f(-x) = f(x) \geq f(t)$ ，

所以 $-x \in S_{f(t)}$ ，所以对任意 $t \in D$ ， $S_{f(t)}$ 是对称集。

充分性：若对任意 $t \in D$ ， $S_{f(t)}$ 是对称集，

因为对任意 $t \in D$ ， $t \in S_{f(t)}$ ，所以 $-t \in S_{f(t)}$ ，即 $f(-t) \geq f(t)$ ①，

又 $-t \in S_{f(-t)}$ ，所以 $t \in S_{f(-t)}$ ，即 $f(t) \geq f(-t)$ ②。

由①②得，对任意 $t \in D$ ， $f(t) = f(-t)$ ，

所以函数 $y = f(x)$ 是偶函数。

综上，“函数 $y = f(x)$ 是偶函数”的充要条件是“对任意 $t \in D$ ， $S_{f(t)}$ 是对称集”，得证。

(3) 因为对于任意 $t_1 < t_2 \in D$ ，都有 $S_{f(t_2)} \subseteq S_{f(t_1)}$ ，

所以若 $x \in S_{f(t_2)}$ ，则 $x \in S_{f(t_1)}$ ，即若 $f(x) \geq f(t_2)$ ，则 $f(x) \geq f(t_1)$ ，

所以 $f(t_2) \geq f(t_1)$ ，所以 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调不减，

所以对任意 $x \in \mathbb{R}$ ， $f'(x) = e^x - mx \geq 0$ 恒成立。

当 $x = 0$ 时，显然成立， $m \in \mathbb{R}$ ；

当 $x > 0$ 时， $m \leq \frac{e^x}{x}$ 恒成立，令 $g(x) = \frac{e^x}{x}$ ， $g'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ ，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减， $(1,+\infty)$ 单调递增，所以 $m \leq g(x)_{\min} = g(1) = e$ ；

当 $x < 0$ 时， $m \geq \frac{e^x}{x}$ 恒成立，此时 $g'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2} < 0$

因为 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，当 $x \rightarrow -\infty$ 时， $g(x) \rightarrow 0$ ， $g(x) < 0$ ，

$x < 0$ ， $x \rightarrow 0$ 时， $g(x) \rightarrow -\infty$ ，

所以 $m \geq 0$ ；

综上， $m \in [0, e]$ 。

【点睛】 关键点点睛：函数在区间上单调不减等价于导函数在区间上大于等于0恒成立。