# 2026年上海市春季招生统一文化考试（春季高考）数学试卷（回忆版）

## 一、填空题

1．已知集合 $A=\{2,4\}$， $B=\{2,3,m\}$，若 $A\subseteq B$，则 $m=$____________.

2．关于 $x$ 的不等式 $\dfrac{x+2}{x-3}<0$ 的解集为____________.

3．已知 $\vec{a}=(x,3)$，$\vec{b}=(4,6)$，若 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$，则 $x=$____________.

4．在平面直角坐标系中，点 $(1,2)$ 到直线 $4x-3y+5=0$ 的距离为____________.

5．$\left(\dfrac{1}{x}+3x^2\right)^6$ 的二项展开式中，$\dfrac{1}{x^3}$ 的系数为____________.

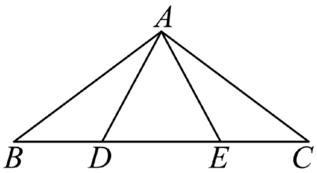
6．若 $a>0$，$b>0$，且 $a+2b=4$，则 $ab$ 的最大值是______.

7．在5个人中选3个人去演讲，若甲一定去，则一共有____________种选法.

8．已知点 $P$ 为抛物线 $\Gamma: y^2=4x$ 上一点，若点 $P$ 到 $\Gamma$ 的焦点的距离是 $P$ 到 $y$ 轴的距离的两倍，则点 $P$ 的横坐标是____________.

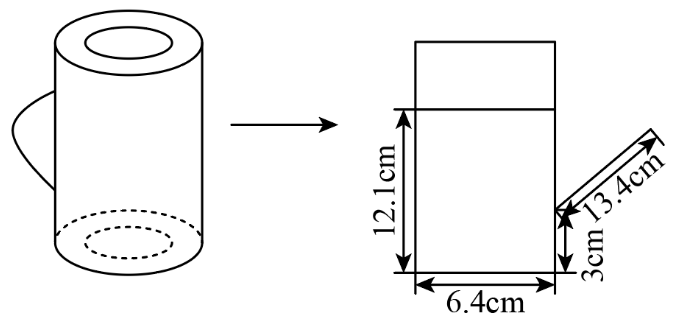
9．已知 $m>1$，对于所有满足 $|z|=2$ 的复数 $z$，都有 $|z-\mathrm{i}|$ 的最小值与 $|z-m|$ 的最小值相同，则 $m=$____________.

10．在 $\vee ABC$ 中，$D$、$E$ 在边 $BC$ 上，且 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EC}$，$\left|\overrightarrow{AD}\right|=1$，$\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AE}$ 所成的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的最大值为____________.




11．已知椭圆 $\Gamma_1:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 与椭圆 $\Gamma_2:\dfrac{y^2}{b^2+2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$ 相交于 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点，且与 $\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$ 的四个焦点在同一个圆上，则 $b^2=$_____________.

12．有一个油壶，壶身视为圆柱，壶嘴视为直线且不计容积，壶底直径 $6.4$ 厘米，壶身高 $16$ 厘米，壶内油液面高 $12.1$ 厘米，壶嘴长 $13.4$ 厘米，与壶身夹角为 $30°$，壶嘴最低点距壶底 $3$ 厘米，将壶身向壶嘴方向至少转_____________度可使油倒出（精确到 $0.01°$）



## 二、单选题

13．下列数列中是等差数列也是等比数列的是（　　）

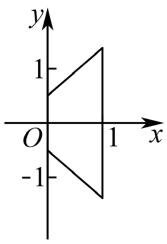
A．1，−1，1，−1，1　　B．1，2，3，4，5

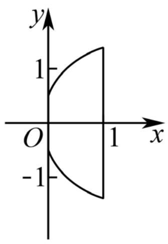
C．5，5，5，5，5　　D．1，2，3，5，7

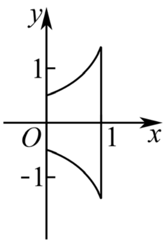
14．已知$x>y>1$，则下列不等式恒成立的是（　　）

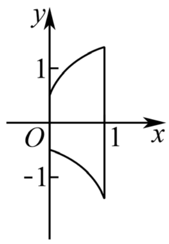
A．$x>y^2$　　B．$xy>x+y$　　C．$x^2>y$　　D．$x+y>xy$

15．平移对称法在几何学中具有重要的应用.设平面直角坐标系$xOy$中有一图形$\Omega$，过$\Omega$内任意一点$P$作垂直于$x$轴的直线$l_P$，满足$l_P\cap\Omega$为一线段.现沿$l_P$方向平移这些线段，使得它们的中点均在$x$轴上，这样叫做平移对称法.对于$-x^2+x+1$，$-x^2-x$，直线$x=0$和直线$x=1$围成的封闭图形$\Omega$，对它进行一次平移对称，得到的图像大致为（　　）

A．


B．


C．


D．


16．对于函数$y=f(x)$，$x\in D$，设$A_f=\{(x,y)\mid y\ge f(x),x\in D\}$.对于点集$M$，若存在$(x_0,y_0)\in M$，使得任取$(x,y)\in M$，总有$y\ge y_0$，则称$(x_0,y_0)$为“最低点”.对于函数$y=f(x)$和$y=g(x)$，以下说法中正确的是（　　）

A．若$y=f(x)$和$y=g(x)$都有最小值，则$A_f\cap A_g$有最低点；

B．若$A_f\cap A_g$有最低点，则$y=f(x)$和$y=g(x)$都有最小值；

C．若$y=f(x)$或$y=g(x)$有最小值，则$A_f\cup A_g$有最低点；

D．若$A_f\cup A_g$有最低点，则$y=f(x)$或$y=g(x)$有最小值.

## 三、解答题

17．某兴趣班共150人，年龄分布及兴趣爱好统计如下：

| 年龄 | 剪纸 | 摄影 | 画画 | 人数 |
|---|---|---|---|---|
| $[25,35)$ | | 8 | | 45 |

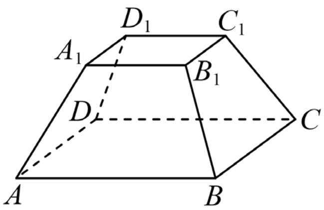
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $[35,45)$ | | 10 | | 55 |
| $[45,55)$ | | 6 | | 50 |

(1)现采用分层抽样抽取 30 人，其中抽到年龄在 $[25,35)$ 岁的有多少人？

(2)该兴趣班 150 人的平均年龄是多少？

(3)现从 150 人中任意抽选 1 人，记抽到的学员年龄在 $[35,45)$ 为事件 $A$，记抽到学员爱好摄影为事件 $B$.事件 $A$ 与 $B$ 是否独立？请说明理由.

18．如图所示正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，其中 $AB=4$， $A_1B_1=2$.




(1)当 $AA_1=2$ 时，求 $AA_1$ 和平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角；

(2)证明：$AA_1$// 平面 $BC_1D$；若棱台高为 3，求三棱锥 $A_1-BC_1D$ 的体积.

19．已知函数 $f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,0<\varphi<\pi\right)$.

(1)当 $\omega=2$， $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=0$，求函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

(2)若函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为 $3\pi$，且 $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 在 $x\in\left[0,2026\pi\right)$ 上恰好有 1351 个解，求 $\varphi$ 的取值范围.

20．已知双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$，过点 $M\left(m,0\right)$ 作不垂直于 $x$ 轴的直线 $l$ 交双曲线 $\Gamma$ 于 $A$ 、 $B$ 两点.

(1)求双曲线离心率；

(2)若点 $A\left(\sqrt{3},1\right)$，点 $B$ 在双曲线的右支上，且 $B$ 是 $AM$ 的中点，求直线 $l$ 的斜率；

(3)若 $m>0$， $F_1$， $F_2$ 分别是双曲线 $\Gamma$ 的左右焦点， $A'$ 是 $A$ 关于 $y$ 轴的对称点，若存在直线 $l$ 使得 $\overrightarrow{F_1A'}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，求 $m$ 的取值范围.

21．设 $f\left(x\right)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数.定义性质 $P$：若对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，当 $\left|x_1\right|<\left|x_2\right|$ 时， $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，则称函数 $f\left(x\right)$ 具有“性质 $P$”.

(1)判断函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x$ 是否具有“性质 $P$”；

(2)若分段函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}ax,x\le0\\x+b,x>0\end{cases}$ 具有“性质 $P$”，求所有满足条件的实数 $a$ 和 $b$ 的解；

(3)已知 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left[0,1\right)$，且在 $\left[0,+\infty\right)$ 上是严格增函数，证明：$f\left(x\right)$ 是偶函数的充要条件是：$f\left(x\right)$ 具有“性质 $P$”.

《2026年上海市春季招生统一文化考试（春季高考）数学试卷（回忆版）》参考答案

| 题号 | 13 | 14 | 15 | 16 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | C | C | A | D | | | | | | |

1．4

【分析】利用子集的定义求解.

【详解】$\because A=\{2,4\}$， $B=\{2,3,m\}$， $A\subseteq B$，

$\therefore$集合$A$中所有的元素都在集合$B$中，

$\therefore$集合$A$中的元素$4$在集合$B$中，

$\therefore m=4$.

故答案为： $4$.

2．$(-2,3)$

【分析】由$\dfrac{x+2}{x-3}<0$可得:$(x+2)(x-3)<0$，解不等式可得其解集.

【详解】由$\dfrac{x+2}{x-3}<0$可得:$(x+2)(x-3)<0$，

解得:$-2<x<3$，

所以不等式$\dfrac{x+2}{x-3}<0$的解集为$(-2,3)$.

故答案为： $(-2,3)$.

3．2

【分析】由向量平行的坐标表示计算即可.

【详解】因为$\vec{a}\,//\,\vec{b}$，所以$x\times 6-4\times 3=0$，即$6x-12=0$，解得$x=2$.

故答案为：2.

4．$\dfrac{3}{5}$

【分析】根据点到直线的距离公式求解即可.

【详解】根据点到直线的距离公式可得$d=\dfrac{|4\times 1-3\times 2+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{3}{5}$.

故答案为： $\dfrac{3}{5}$.

5．18

【分析】写出二项展开式的通项公式$T_{k+1}=\mathrm{C}_6^k 3^k x^{3k-6}$，令$3k-6=-3$，解出$k$，代入即可得到答案.

【详解】二项式的展开式的通项公式为$T_{k+1}=\mathrm{C}_6^k\left(\dfrac{1}{x}\right)^{6-k}\left(3x^2\right)^k=\mathrm{C}_6^k 3^k x^{3k-6}$，

令$3k-6=-3$，解得$k=1$，

所以$\dfrac{1}{x^3}$的系数为$C_6^1\times 3=18$.

故答案为：18.

6．2

【分析】由于$a$、$b$为正值，且$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$为定值4，因此可以运用基本不等式先求出$2\sqrt{2ab}$的最大值，进而求出$ab$的最大值.

【详解】解：$\because a>0$，$b>0$，$a+2b=4$

$\therefore 4=a+2b\geq 2\sqrt{2ab}$

$\therefore ab\leq 2$，当且仅当$a=2b$时取等号，即$a=2$，$b=1$时取等号

故答案为：2.

【点睛】此题考查基本不等式的应用，应用基本不等式求最值要注意“一正二定三相等”的条件，属于基础题

7．6

【分析】结合组合知识求解即可.

【详解】由题意，甲一定去，则从剩下的4人中任选2人即可，

则一共有$C_4^2=6$种选法.

故答案为：6.

8．1

【分析】设$P(x_0,y_0)(x_0\geq 0)$，根据条件，利用抛物线的定义得$x_0+1=2x_0$，即可求解.

【详解】因为抛物线$\Gamma:y^2=4x$的焦点为$F(1,0)$，准线方程为$x=-1$，设$P(x_0,y_0)(x_0\geq 0)$，

由题有$x_0+1=2x_0$，解得$x_0=1$，

故答案为：1.

9．3

【分析】根据复数的几何意义分析求解即可.

【详解】由$|z|=2$得复数$z$对应的点的集合为以原点为圆心，2为半径的圆，

因为$|z-\mathrm{i}|$表示点$(0,1)$到圆上一点的距离，且点$(0,1)$到圆心$(0,0)$的距离为1，

则$|z-\mathrm{i}|$的最小值为$2-1=1$，

而$|z-m|$表示点$(m,0)$到圆上一点的距离，且点$(m,0)$到圆心$(0,0)$的距离为$m,m>1$，

则$|z-m|$的最小值为$|2-m|$，

又因为$|z-\mathrm{i}|$的最小值与$|z-m|$的最小值相同，

所以$\left|2-m\right|=1$，$m>1$，解得$m=3$.

故答案为：3.

10．$-\dfrac{39}{32}$

【分析】先利用$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{AE}$表示$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$，再将$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$转化为$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{AE}$的计算，进而求解.

【详解】$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right)=-\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AE}$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AE}\right)=-2\left|\overrightarrow{AD}\right|^2+5\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}-2\left|\overrightarrow{AE}\right|^2$

$\because \left|\overrightarrow{AD}\right|=1$，$\overrightarrow{AD}$与$\overrightarrow{AE}$所成的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+\dfrac{5}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AE}\right|-2\left|\overrightarrow{AE}\right|^2$

令$\left|\overrightarrow{AE}\right|=t>0$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2t^2+\dfrac{5}{2}t-2=-2\left(t-\dfrac{5}{8}\right)^2-\dfrac{39}{32},t>0$

当$\left|\overrightarrow{AE}\right|=\dfrac{5}{8}$时，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$的最大值为$-\dfrac{39}{32}$.

故答案为：$-\dfrac{39}{32}$.

11．$\sqrt{3}$

【分析】根据椭圆和圆的对称性、椭圆的焦距公式进行求解即可.

【详解】因为两个椭圆的四个焦点在同一个圆上，

所以根据椭圆$\Gamma_1$和$\Gamma_2$的对称性可知，该圆的圆心为原点，

因此有$\sqrt{a^2-1^2}=\sqrt{b^2+2-b^2}\Rightarrow a^2=3$，

且两个椭圆的半焦距为$\sqrt{b^2+2-b^2}=\sqrt{2}$，

因此该圆的方程为$x^2+y^2=2$，

又因为$A$、$B$、$C$、$D$四点与$\Gamma_1$和$\Gamma_2$的四个焦点在同一个圆上，

所以由椭圆和圆的对称性可知，这四个点也在圆$x^2+y^2=2$上，

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+y^2=1\\x^2+y^2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{3}{2}\\y^2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$，代入椭圆$\Gamma_2:\dfrac{y^2}{b^2+2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1$中，

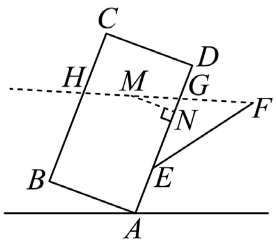
得$\dfrac{\frac{1}{2}}{b^2+2}+\dfrac{\frac{3}{2}}{b^2}=1\Rightarrow\left(b^2\right)^2=3$，又$b^2>0$，故$b^2=\sqrt{3}$，

故答案为：$\sqrt{3}$

12．14.2°

【分析】根据题意，结合条件分别表示出 $EG, EF$，然后在 $\triangle EGF$ 中，由正弦定理代入计算，即可得到结果.

【详解】




设壶嘴最低点，最高点分别是 $E, F$，

图中圆柱轴截面矩形，距离点 $E$ 最近的顶点是点 $A$，另外三个顶点分别为 $B, C, D$，

当水平液面经过点 $F$ 时，可将油倒出，

设倾斜角为 $\theta$，当液面经过点 $D$ 时，$\theta=\arctan\dfrac{3.9}{6.4}\approx 31.36^\circ$，

先考虑液面不超过点 $D$，即 $\theta\in\left[0,\arctan\dfrac{3.9}{6.4}\right]$ 的情况，

设液面与 $AD, CB$ 分别交于点 $G, H$，

设 $GH$ 的中点为 $M$，过 $M$ 作 $AD$ 的垂线，垂足为 $N$，

则 $MN=\dfrac{1}{2}AB=3.2$，$\angle GMN=\theta$，所以 $GN=MN\tan\theta=3.2\tan\theta$，

因为 $AN=12.1$，所以 $GE=GN+AN-AE=3.2\tan\theta+9.1$，

因为 $\angle EGF=\angle NMG+\angle MNG=90^\circ+\theta$，

所以 $\angle F=180^\circ-\angle FEG-\angle EGF=60^\circ-\theta$，

在 $\triangle EGF$ 中，$\dfrac{EG}{\sin\angle F}=\dfrac{EF}{\sin\angle EGF}$，

即 $\dfrac{3.2\tan\theta+9.1}{\sin\left(60^\circ+\theta\right)}=\dfrac{13.4}{\sin\left(90^\circ+\theta\right)}=\dfrac{13.4}{\cos\theta}$，

即 $3.2\sin\theta+9.1\cos\theta=13.4\sin\left(60^\circ+\theta\right)=6.7\sqrt{3}\cos\theta-6.7\sin\theta$，

即 $99\sin\theta=\left(67\sqrt{3}-91\right)\cos\theta$，所以 $\tan\theta=\dfrac{67\sqrt{3}-91}{99}$，

即 $\theta=\arctan\dfrac{67\sqrt{3}-91}{99}\approx 14.2^\circ$，

因为 $14.2^\circ<31.36^\circ$，所以至少将油壶倾斜 $14.2^\circ$ 即可将油倒出.

故答案为：$14.2^\circ$

13．C

【分析】设该数列为 $\left\{a_n\right\}$，由题可得 $a_{n+1}-a_n=d$，$a_{n+1}=qa_n$，其中 $q\neq 0, q$，$d$ 为常数，据此推得 $q-1=0=d$，即得该数列为非零常数列，即可判断.

【详解】设该数列为$\{a_n\}$，则该数列满足$a_{n+1}-a_n=d$，$a_{n+1}=qa_n$，其中$q\neq 0$.

则$a_{n+1}-a_n=(q-1)a_n=d$，因$q$，$d$为常数，该式对任意正整数成立，则$q-1=0=d$，

从而该数列为非零常数列，由选项知只有C满足题意.

故选：C

14．C

【分析】举反例即可求解ABD，根据不等式的传递性即可求解C.

【详解】对于A,取$x=3,y=2$，则$x=3,y^2=4,$故$x<y^2$，所以A错误，

对于B，取$x=1.5,y=1.2,$则$xy=1.8,x+y=2.7$，此时$xy<x+y$，故B错误，

对于C，由于$x>y>1$，故$x^2>x$，因此$x^2>y$，C正确，

对于D,取$x=3,y=2$，则$x+y=5,xy=6$，此时$x+y<xy$，故D错误，

故选：C

15．A

【分析】先作出两函数在区间$[0,1]$上的图象，根据平移对称法，分别算出$x=0$和$x=\frac{1}{2}$时，两函数的函数值，求得对应线段的中点的纵坐标，从而得出需要将两函数图象上下平移的长度，根据平移后对应点的坐标结合各选项逐一判断即得；也可以通过计算两函数的函数值差值等分量，根据该函数的类型结合选项确定答案.

【详解】方法一：依题意，作出函数$y_1=-x^2+x+1$与$y_2=-x^2-x$在$[0,1]$上的图象.

按照平移对称法，当$x=0$时，$y_1=1,y_2=0$，线段中点纵坐标为$\frac{1}{2}$，

则应将此时的线段沿$l_P$方向向下平移$\frac{1}{2}$，$y_1,y_2$的图象上的对应点纵坐标应分别为$\frac{1}{2}$和$-\frac{1}{2}$，故排除B项；

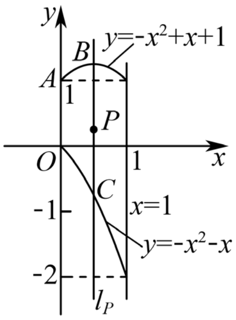
当$x=\frac{1}{2}$时，$y_1=\frac{5}{4},y_2=-\frac{3}{4}$，线段中点纵坐标为$\frac{1}{4}$，则应将此时的线段沿$l_P$方向向下平移$\frac{1}{4}$，

$y_1,y_2$的图象上的对应点纵坐标应分别为$1$和$-1$，故可排除C，D两项，A项符合题意.

方法二：根据平移对称法的基本概念，将函数$y=-x^2+x+1$和函数$y=-x^2-x$在$[0,1]$上的函数值差值等分在$x$轴上下两侧，

等分量为$y=\frac{-x^2+x+1-\left(-x^2-x\right)}{2}=x+\frac{1}{2}$，故在$[0,1]$上线性变化，结合选项知，只有选项A符合题意.

故选：A.




16．D

【分析】可以举反例证明选项 A、B、C 的命题均为假命题，对 D，根据“最低点”的定义分析得$(x_0,y_0)\in A_f$或$(x_0,y_0)\in A_g$，再分类讨论即可.

【详解】对于 A 项，取$f(x)=x$，$x\in[0,1]$，取$g(x)=x$，$x\in[2,3]$，

则$f(x)_{\min}=0$，$g(x)_{\min}=2$；而$A_f\cap A_g=\varnothing$无最低点，故 A 错误；

对于 B 项，取$f(x)=x$，$x\in(0,3]$，取$g(x)=x$，$x\in[2,3]$，

则$f(x)$无最小值，$g(x)_{\min}=2$；而$A_f\cap A_g=A_g$有最低点$(2,2)$，故 B 错误；

对于 C 项，取$f(x)=-x^2$，$x\in R$，取$g(x)=x^2$，$x\in R$，

则$f(x)$无最小值，$g(x)_{\min}=0$；

因为$f(x)=-x^2$的函数值可趋向于负无穷大，所以$A_f=\{(x,y)\mid y\geq -x^2,x\in R\}$无最低点，则$A_f\cup A_g$亦无最低点，故 C 错误；

对于 D 项，因为$A_f\cup A_g$有最低点，不妨设$(x_0,y_0)$为$A_f\cup A_g$的最低点，$y=f(x)$且$x\in D_1$，$y=g(x)$且$x\in D_2$，

所以$(x_0,y_0)\in A_f$或$(x_0,y_0)\in A_g$，

若$(x_0,y_0)\in A_f$，则$y_0=f(x_0)$且对任意的$x\in D_1$，总有$y=f(x)\geq y_0$，即$f(x)_{\min}=y_0$；

若$(x_0,y_0)\in A_g$，同理可知$g(x)_{\min}=y_0$；

所以若$A_f\cup A_g$有最低点，则$y=f(x)$或$y=g(x)$有最小值，故 D 正确.

故选：D.

17．(1)9；

(2)$\frac{121}{3}$；

(3)不相互独立，理由见解析.

【分析】（1）由题意，计算$[25,35)$年龄段占总体比例，据此可得答案.

（2）利用年龄区间中点作为该区间年龄平均值，再由各年龄段人数占总体比例可得答案；

（3）验证 $P(A)\cdot P(B)$，是否等于 $P(AB)$ 可得答案.

【详解】（1） $[25,35)$ 年龄段占总体比例为： $\frac{45}{150}=\frac{3}{10}$，则抽取人数为：$30\times\frac{3}{10}=9$；

（2）由题可得150人的平均年龄为：$30\times\frac{45}{150}+40\times\frac{55}{150}+50\times\frac{50}{150}=30\times\frac{3}{10}+40\times\frac{11}{30}+50\times\frac{1}{3}=\frac{121}{3}$；

（3）由题可得 $P(A)=\frac{55}{150}=\frac{11}{30}$， $P(B)=\frac{24}{150}=\frac{4}{25}$， $P(AB)=\frac{10}{150}=\frac{1}{15}$，

注意到 $P(A)\cdot P(B)\neq P(AB)$，则事件 $A$ 与事件 $B$ 不相互独立.

18．(1) $45°$

(2)证明见解析，体积为 $8$

【分析】（1）作 $A_1$ 到下底面的垂线，确定线面角的平面角，再通过边长计算该角的大小.

（2）连接上下底面对角线的交点，利用正棱台性质证得线线平行，进而证明线面平行；利用线面垂直将三棱锥拆分为两个小棱锥，结合棱台的高计算其体积.

【详解】（1）过 $A_1$ 作 $A_1H\perp$ 平面 $ABCD$ 于 $H$,连接 $AH$，

过 $H$ 分别作 $HE\perp AB$ 于 $E,HF\perp AD$ 于 $F$,连接 $A_1E,A_1F$，

如图 $HE$ 为 $A_1E$ 在平面 $ABCD$ 上的投影,

由于 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $A_1H\perp AB$，

由于 $A_1H\cap HE=H,A_1H,HE\subset$ 平面 $A_1HE$，

所以 $AB\perp$ 平面 $A_1HE$.由于 $A_1E\subset$ 平面 $A_1HE$， 所以 $A_1E\perp AB$.

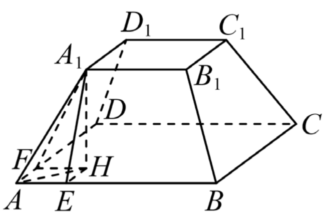
所以 $AE=\frac{4-2}{2}=1$,同理 $A_1F\perp AD$, $AF=1$,四边形 $AEHF$ 为正方形,

所以 $AH=\sqrt{2}$， $AH$ 为 $A_1A$ 在平面 $ABCD$ 上的投影,

又因平面 $ABCD//$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,

所以 $AA_1$ 和平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角即 $\angle A_1AH$， $\cos\angle A_1AH=\frac{AH}{AA_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

故 $AA_1$ 和平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角为 $45^{\circ}$.



（2）连接 $AC$ 、 $BD$ 交于 $O$,连接 $A_1C_1$ 、 $B_1D_1$ 交于 $O_1$，

如图,上下底面为正方形,由正棱台性质,可得 $A_1C_1//AC$ ,且 $A_1C_1=2\sqrt{2},AC=4\sqrt{2},AO=\dfrac{1}{2}AC=A_1C_1$,

所以四边形 $A_1C_1OA$ 为平行四边形,所以 $AA_1//OC_1$，

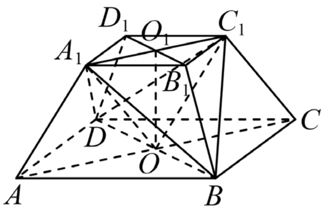
因为 $AA_1\not\subset$ 平面 $BC_1D,OC_1\subset$ 平面 $BC_1D$，所以 $AA_1//$ 平面 $BC_1D$.

由正棱台性质, $OO_1$ 与上下底面均垂直,则 $OO_1=3$，

因为 $OO_1\perp BD,AC\perp BD,AC\cap OO_1=O$， $AC,OO_1\subset$ 平面 $A_1OC_1$，

所以 $BD\perp$ 平面 $A_1OC_1$ ,所求三棱锥体积可拆分成两个小三棱锥的体积之和,

即: $V_{A_1-BC_1D}=V_{B-A_1OC_1}+V_{D-A_1OC_1}=\frac{1}{3}OB\cdot S_{\triangle A_1OC_1}+\frac{1}{3}OD\cdot S_{\triangle A_1OC_1}=\frac{1}{3}BD\cdot S_{\triangle A_1OC_1}=\frac{1}{3}\times4\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times3=8.$




19．(1) $y=-\sqrt{3}x+\dfrac{1}{2}$

(2) $0<\varphi\le\dfrac{\pi}{12}$ 或 $\dfrac{\pi}{4}<\varphi\le\dfrac{3\pi}{4}$，

【分析】（1）根据 $\omega=2$ 以及 $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=0$ 可得 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{6}\right)$，即可求导以及点斜式求解直线方程，

（2）利用整体法，结合正弦函数的性质即可分类讨论求解.

【详解】（1）当 $\omega=2$ 时，则 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，

根据 $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=0$ 可得 $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\varphi\right)=0$，故 $\dfrac{\pi}{6}+\varphi=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，故 $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

由于 $0<\varphi<\pi$，故 $\varphi=\dfrac{5\pi}{6}$，故 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{6}\right)$，

$f'(x)=2\cos\left(2x+\dfrac{5\pi}{6}\right)$，则 $f'(0)=2\cos\dfrac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$，

故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=-\sqrt{3}(x-0)+\dfrac{1}{2}$，故 $y=-\sqrt{3}x+\dfrac{1}{2}$，

（2）函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $3\pi$，故 $\omega=\dfrac{2\pi}{3\pi}=\dfrac{2}{3}$，所以 $f(x)=\sin\left(\dfrac{2}{3}x+\varphi\right)$，

令 $t=\dfrac{2}{3}x+\varphi$，当 $x\in[0,2026\pi)$，则 $t\in\left[\varphi,\dfrac{4052\pi}{3}+\varphi\right)$，

令 $\sin t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则 $t=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ 或 $t=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

当 $0<\varphi\le\frac{\pi}{4}$ 时，要使得 $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 有 1351 个实数根，则 $\begin{cases}\frac{\pi}{4}+2\pi\times 675<\frac{4052\pi}{3}+\varphi\\ \frac{3\pi}{4}+2\pi\times 675\ge\frac{4052\pi}{3}+\varphi\\ 0<\varphi\le\frac{\pi}{4}\end{cases}$，解得 $0<\varphi\le\frac{\pi}{12}$，

当 $\frac{\pi}{4}<\varphi\le\frac{3\pi}{4}$ 时，要使得 $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 有 1351 个实数根，则 $\begin{cases}\frac{3\pi}{4}+2\pi\times 675<\frac{4052\pi}{3}+\varphi\\ \frac{9\pi}{4}+2\pi\times 675\ge\frac{4052\pi}{3}+\varphi\\ \frac{\pi}{4}<\varphi\le\frac{3\pi}{4}\end{cases}$，解得 $\frac{\pi}{4}<\varphi\le\frac{3\pi}{4}$，

当 $\frac{3\pi}{4}<\varphi<\pi$ 时，要使得 $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 有 1351 个实数根，则 $\begin{cases}\frac{9\pi}{4}+2\pi\times 675<\frac{4052\pi}{3}+\varphi\\ \frac{11\pi}{4}+2\pi\times 675\ge\frac{4052\pi}{3}+\varphi\\ \frac{3\pi}{4}<\varphi<\pi\end{cases}$，无解，

综上可得 $0<\varphi\le\frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{\pi}{4}<\varphi\le\frac{3\pi}{4}$.

20．(1) $\sqrt{2}$

(2) $\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$

(3) $\left(\frac{4}{3},2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$

【分析】（1）求出 $a,b,c$，直接利用公式即可求解；

（2）根据中点坐标公式求出点 $B$，将点 $B$ 坐标代入双曲线方程求出 $m$，再利用斜率公式即可求出答案；

（3）设直线 $l$ 方程为 $x=ny+m$，联立求出 $\left(n^2-1\right)y^2+2nmy+m^2-2=0$，由题意得 $\Delta>0$ 且 $n^2-1\ne 0$，再根据 $\overrightarrow{F_1A'}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$ 求出 $n^2=m^2-2m+1$，结合 $\Delta>0$ 且 $n^2-1\ne 0$ 可求出答案.

【详解】（1）对于双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$，$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{2}$，

$c=\sqrt{a^2+b^2}=2$，

所以双曲线离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

（2）因为点 $B$ 是 $AM$ 的中点，所以点 $B\left(\frac{m+\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

代入双曲线方程 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$，得 $\frac{\left(m+\sqrt{3}\right)^2}{8}-\frac{1}{8}=1$，

解得 $m=\pm 3-\sqrt{3}$，

又点 $B$ 在双曲线的右支上，所以 $m+\sqrt{3}>0$，即 $m>-\sqrt{3}$，

所以 $m=3-\sqrt{3}$，

所以直线 $l$ 的斜率为 $\dfrac{0-1}{3-\sqrt{3}-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}-3}=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

（3）当直线斜率为 $0$ 时，易知 $\overrightarrow{F_1A'}$ 与 $\overrightarrow{F_2B}$ 共线，不符合题意；

当直线斜率不为 $0$ 时，设直线 $l$ 方程为 $x=ny+m$，

设 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则 $A'\left(-x_1,y_1\right)$，

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1\\ x=ny+m\end{cases}$，整理得 $\left(n^2-1\right)y^2+2nmy+m^2-2=0$，

$\Delta=\left(2nm\right)^2-4\left(n^2-1\right)\left(m^2-2\right)=4\left(m^2+2n^2-2\right)>0$（*）且 $n^2-1\neq 0$，

$y_1+y_2=\dfrac{-2nm}{n^2-1}$，$y_1y_2=\dfrac{m^2-2}{n^2-1}$，

因为 $F_1\left(-2,0\right)$，$F_2\left(2,0\right)$，

所以 $\overrightarrow{FA'}=\left(-x_1+2,y_1\right)=\left(-ny_1-m+2,y_1\right)$，$\overrightarrow{F_2B}=\left(x_2-2,y_2\right)=\left(ny_2+m-2,y_2\right)$，

所以 $\overrightarrow{FA'}\cdot\overrightarrow{F_2B}=\left(-ny_1-m+2\right)\left(ny_2+m-2\right)+y_1y_2=0$，

即 $\left(-n^2+1\right)y_1y_2-n\left(m-2\right)\left(y_1+y_2\right)-\left(m-2\right)^2=0$，

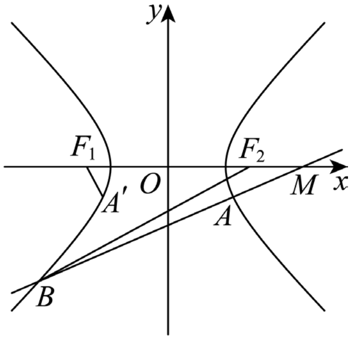
即 $\dfrac{\left(-n^2+1\right)\left(m^2-2\right)}{n^2-1}-\dfrac{n\left(m-2\right)\left(-2nm\right)}{n^2-1}-\left(m-2\right)^2=0$，

整理得 $m^2-n^2-2m+1=0$，即 $n^2=m^2-2m+1$，

代入（*）中得 $3m^2-4m>0$，又 $m>0$，所以 $m>\dfrac{4}{3}$，

又因为 $n^2-1\neq 0$，即 $m^2-2m+1-1\neq 0$，所以 $m\neq 0$ 且 $m\neq 2$，

综上，$m$ 的取值范围为 $\left(\dfrac{4}{3},2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$.




21．(1)没有，理由见解析

(2) $a=-1,b=0$

(3)证明见解析

【分析】（1）运用特例法，结合指数函数的单调性进行判断即可；

（2）根据一次函数的单调性，结合“性质 $P$”的特性进行求解即可；

（3）根据充要条件的定义，结合偶函数的性质、“性质 $P$”的特性进行运算证明即可.

【详解】（1）函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x$ 不具有“性质 $P$”，理由如下：

例如当 $x_1=-2,x_2=-3$ 时，显然 $\left|x_1\right|<\left|x_2\right|$ 成立，

$\mathrm{e}^{x_1}=\mathrm{e}^{-2},\mathrm{e}^{x_2}=\mathrm{e}^{-3}$，根据指数函数的单调性可知 $\mathrm{e}^{-2}>\mathrm{e}^{-3}$，

所以有 $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$，这与“性质 $P$”矛盾，故函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x$ 不具有“性质 $P$”；

（2）因为函数 $f\left(x\right)$ 具有“性质 $P$”，所以取 $x_1=0$，有 $\left|x_1\right|=0<\left|x_2\right|$，

于是有 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，

当 $x_2\in\left(0,+\infty\right)$ 时，由 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)\Rightarrow 0<x_2+b\Rightarrow b\geq 0$，

当 $x_2\in\left(-\infty,0\right)$ 时，由 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)\Rightarrow 0<ax_2\Rightarrow a<0$，

若 $b>0$，若 $x_2\in\left[\dfrac{b}{a},0\right)$，则有 $f\left(x_2\right)\leq f\left(\dfrac{b}{a}\right)=a\cdot\dfrac{b}{a}=b$，

取 $x_1=-\dfrac{x_2}{2}>0\Rightarrow f\left(x_1\right)=x_1+b>b\geq f\left(x_2\right)$，

此时 $\left|x_1\right|<\left|x_2\right|$，但是 $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$，不符合“性质 $P$”，所以 $b>0$ 不符合题意，

故 $b=0$，此时 $f\left(x\right)=\begin{cases}ax,x\leq 0\\ x,x>0\end{cases}$，

若 $x_1>0,x_2<0,x_1<-x_2$ 时，则 $\dfrac{x_1}{x_2}>-1$，

由 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)\Rightarrow x_1<ax_2\Rightarrow\dfrac{x_1}{x_2}>a\Rightarrow a\leq -1$，

若 $x_1<0,x_2>0,-x_1<x_2$ 时，则 $\dfrac{x_2}{x_1}<-1$，

由 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)\Rightarrow ax_1<x_2\Rightarrow\dfrac{x_2}{x_1}<a\Rightarrow a\geq -1$，

因此 $a=-1$，

综上所述：当且仅当 $a=-1,b=0$ 时，满足条件；

（3）充分性：若 $f\left(x\right)$ 具有“性质 $P$”，则 $f\left(x\right)$ 是偶函数.

若存在 $x_0>0$，$f\left(x_0\right)\neq f\left(-x_0\right)$，不妨设 $f\left(x_0\right)>f\left(-x_0\right)$，

记 $f\left(x_0\right)=M, f\left(-x_0\right)=m$，即 $M>m$，

因为函数 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left[0,1\right)$，

所以 $0\le m<M<1$，

若 $\left|x\right|<\left|-x_0\right|$，则有 $f\left(x\right)<f\left(-x_0\right)=m$，

若 $\left|x\right|>x_0$，则有 $f\left(x\right)>f\left(x_0\right)=M$，

故对任意 $x\in\mathbf{R}$， $f\left(x\right)\ne\dfrac{M+m}{2}\in\left[0,1\right)$，这与 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left[0,1\right)$ 矛盾，

所以 $f\left(x_0\right)\ne f\left(-x_0\right)$ 不成立，则有 $f\left(x_0\right)=f\left(-x_0\right)$，因此函数 $f\left(x\right)$ 是偶函数；

必要性：若 $f\left(x\right)$ 是偶函数，则 $f\left(x\right)$ 具有“性质 $P$”.

当 $\left|x_1\right|<\left|x_2\right|$ 时，因为 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上是严格增函数，

所以 $f\left(\left|x_1\right|\right)<f\left(\left|x_2\right|\right)$，

又因为函数 $f\left(x\right)$ 是偶函数，

所以由 $f\left(\left|x_1\right|\right)<f\left(\left|x_2\right|\right)\Rightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，因此 $f\left(x\right)$ 具有“性质 $P$”.

所以 $f\left(x\right)$ 是偶函数的充要条件是： $f\left(x\right)$ 具有“性质 $P$”.