1953 年试题

一、下列十题顺次解答，不必抄题（但须写明题号：甲，乙，丙……），结果务须明确，过程可以简单。

甲、解 $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{10}{3}$

乙、若 $3x^2+kx+12=0$ 之二根相等，求 k.

丙、求 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 之值.

丁、求 $\log_{10}\frac{300}{7}+\log_{10}\frac{700}{3}+\log_{10}1$ 之值 .

戊、求 tan(870°)

己、若 $\cos 2x=\frac{1}{2}$，求x之通值.

庚、两三角形相似之条件为何？（把你所知道的都写出来）

辛、长方体之长、宽、高为 12 寸，3 寸，4 寸，求对角线之长.

壬、垂直三棱柱之高为 6 寸，底面三边之长为 3 寸，4 寸，5 寸，求体积.

癸、球之表面积为 36π方寸，求体积.

二、解 $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9, \\ 4x^2-5xy+6y^2=30. \end{cases}$

三、(1)化简 $\sqrt{\frac{12}{25}}+\sqrt[4]{90000}+\sqrt[6]{\frac{64}{27}}$.

(2)求 $(2x^3+\frac{1}{x})^{12}$ 之展开式中之常数项.

四、锐角三角形 ABC 之三高线为 AD，BE，CF，垂心为 H；求证 HD 平分∠EDF.

五、已知三角形的两个角为 45°及 60°，而其夹边长 1 尺；求最小边之长及面积.

1953 年试题答案

一、下列十题顺次解答，不必抄题（但须写明题号：甲，乙，丙……），结果务须明确，过程可以简单。

甲、将原方程整化得 $6(x^2+1)=10(x^2-1)$，故 $4x^2=16$，$x=\pm 2$.

乙、原方程二根相等之条件为 $k^2-4\times 3\times 12=0$，

即 $k^2=12^2$，$k=\pm 12$.

丙、原行列式 $=3\times 4\times 5-6\times 7-4\times 7+2\times 5$

$=60-42-28+10=0$.

丁、原式 $=\log_{10}(\frac{300}{7}\times\frac{700}{3}\times 1)=\log_{10}10000=4$.

戊、$\tan 870° = \tan(900° - 30°)$

$= \tan(-30°) = -\tan 30°$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$

己、因 $\cos 2x = \frac{1}{2}$，故 $2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$，$x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$.

庚、(i) ∠A=∠A′，∠B=∠B′；

(ii) ∠A=∠A′，AB：A′B′=AC：A′C′；

(iii) AB：A′B′=AC：A′C′=BC：B′C′；

三者各为△ABC—△A′B′C′之条件.

辛、对角线 $=\sqrt{12^2+3^2+4^2}$ 寸 $=\sqrt{169}$ 寸 $=13$ 寸.

壬、因 $3^2+4^2=5^2$，故底面为直角三角形，

其面积为 $\frac{1}{2}\times 3\times 4$ 方寸 $=6$ 方寸.

（或用"底面积 $=\frac{1}{4}\sqrt{(3+4+5)(3+4-5)(3-4+5)(-3+4+5)}$ 方寸 $=6$ 方寸"亦可）

棱柱体积=6×6 立方寸=36 立方寸.

癸、设球的半径为 R 寸，则 $4\pi R^2=36\pi$，∴ $R=3$.

球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$ （立方寸）.

二、解：原方程组消去常数项，得

$$2x^2+5xy-12y^2=0$$

将此方程左边分解因式，得

$$(x+4y)(2x-3y)=0,$$

即 $x+4y=0$，$2x-3y=0$.

由此有

(I) $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9, \\ x+4y=0; \end{cases}$ (II) $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9, \\ 2x-3y=0. \end{cases}$

解方程组(Ⅰ)，得

$$\begin{cases} x_1=\frac{4}{3}\sqrt{3}, \\ y_1=-\frac{1}{3}\sqrt{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-\frac{4}{3}\sqrt{3}, \\ y_2=\frac{1}{3}\sqrt{3}; \end{cases}$$

解方程组(Ⅱ)，得

$$\begin{cases} x_3=3, \\ y_3=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4=-3, \\ y_4=-2. \end{cases}$$

三、解：(1)原式 $=\sqrt{\dfrac{3\times 2^{2}}{5^{2}}}+\sqrt[4]{3^{2}\times 10^{4}}+\sqrt[6]{\dfrac{2^{6}}{3^{3}}}$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{3}+10\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$=\frac{166}{15}\sqrt{3}$$

(2)由二项展开式的通项公式:

$$T_{r+1}=C_{12}^{r}(2x^{3})^{12-r}(\frac{1}{x})^{r}$$

$$=C_{12}^{r}\cdot 2^{12-r}\cdot x^{36-4r}$$

令　　36-4r=0,

∴　　r=9.

故常数项为

$$C_{12}^{9}\cdot 2^{12-9}=C_{12}^{3}\cdot 2^{3}=1760.$$

四、证明:由于 AD⊥BC,BE⊥CA,

∴　点 A,B,D,E 共圆.

故　∠ADE=∠ABE.

又因点 F,B,C,E 共圆,

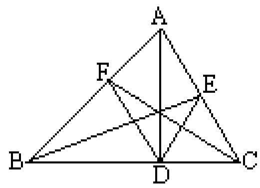
∴　∠FBE=∠FCE.

又因点 C,A,F,D 共圆,

∴　∠FCA=∠FDA.

综上可得∠ADE=∠FDA,

即 AD 平分∠EDF.



五、解:已知∠B=45°,∠C=60°,于是∠A=75°.

由正弦定理得

$$\frac{AC}{\sin 45°}=\frac{1}{\sin 75°},$$

∴　$$AC=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2})}=\sqrt{3}-1(\text{尺}).$$

△ABC的面积 $S=\frac{1}{2}\times 1\times(\sqrt{3}-1)\cdot\sin 60°$

$$=\frac{1}{4}(3-\sqrt{3})\text{（平方尺）}.$$