1954年试题

一、下列六题顺次解答,不必抄题(但须写明题号:甲,乙,丙,……).结果务须明确,过程可以简单.

甲、化简 $[(a^{-\frac{3}{2}} \cdot b^{2})^{-1} \cdot (a \cdot b^{-3})^{\frac{1}{2}} \cdot (b^{\frac{1}{2}})^{7}]^{\frac{1}{3}}$

乙、解 $\frac{1}{6}\log x = \frac{1}{3}\log a + 2\log b + \log c$.

丙、用二项式定理计算 $(3 \cdot 02)^{4}$,使误差小于 $\frac{1}{1000}$.

丁、直角三角形弦上半圆的面积等于勾上半圆与股上半圆面积之和,试证明之.

戊、已知球的半径为 r,求内接正方体的体积.

己、已知三角形的一边之长为 a,两邻角为 β 及 γ,求计算边长 b 的计算公式.

二、描绘 $y=3x^{2}-7x-1$ 之图象,并按下列条件分别求 x 的值的范围:

(i) $y>0$; (ii) $y<0$.

三、假设两圆互相外切,求证用连心线段为直径所作的圆必与前两圆的外公切线相切.

四、解 $\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x} = 1+\sin 2x$,求x之通值.

五、有一直圆锥,全面积为 a;与之同底同高之直圆柱全面积为 a′.求该圆锥高与母线之比.

1954年试题答案

一、下列六题顺次解答,不必抄题,结果务须明确,过程可以简单.

甲、解:原式 $= (a^{\frac{3}{2}}\ b^{-2}\ a^{\frac{1}{2}}\ b^{-\frac{3}{2}}{}_{h}\ b^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}}$

$$= (a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\ b^{-2-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= (a^{2} \cdot b^{0})^{\frac{1}{3}}$$

$$= a^{\frac{2}{3}}$$

乙、解:原式可化为

$$\log x^{\frac{1}{6}} = \log a^{\frac{1}{3}} b^{2} c.$$

于是有

$$x^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{3}} b^{2} c$$

$$\therefore \quad x = (a^{\frac{1}{3}} b^{2} c)^{6} = a^{2} b^{12} c^{6}.$$

丙、解:由 $(3.02)^{4}=(3+0.02)^{4}$

$$=3^{4}+4\times 3^{3}\times 0.02+6\times 3^{2}\times (0.02)^{2}$$

$$+4\times3\times(0.02)^3+(0.02)^4,$$

可知第4项的值已小于0.01,所以,计算可到第3项为止,其误差必小于千分之一.

$$\begin{aligned}(3.02)^4 &= 3^4+4\times3^3\times0.02+6\times3^2\times(0.02)^2\\ &=81+2.16+0.0216\\ &=83.182\end{aligned}$$

丁、证:设直角三角形的勾为 a,股为 b,弦为 c,则有

$$c^2=a^2+b^2$$

所以弦上半圆的面积 $=\frac{1}{2}\pi(\frac{c}{2})^2=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{c^2}{4}$

$$=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{a^2+b^2}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2+\frac{1}{2}\pi(\frac{b}{2})^2.$$

即弦上半圆面积=勾上半圆面积+股上半圆的面积.

戊、解:内接正方体的中心即该球的球心.正方体过中心的对角线为该球的直径,故其长为 2r.若设正方体的边长为 a,则有

$$3a^2=4r^2,$$

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{3}r.$$

所以内接正方体的体积

$$V=a^3=(\frac{2}{3}\sqrt{3}r)^3$$

$$=\frac{8}{9}\sqrt{3}r^3$$

己、解:由正弦定理可知

$$\frac{a}{\sin[180°-(\beta+r)]}=\frac{b}{\sin\beta},$$

$$\therefore\quad b=\frac{a\sin\beta}{\sin[180°-(\beta+r)]}=\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+r)}$$

二、解:将原方程变形,可得

$$(x-\frac{7}{6})^2=\frac{1}{3}(y+\frac{61}{12}).$$

于是,抛物线顶点为$(\frac{7}{6},-\frac{61}{12})$(如图).

抛物线与 x 轴的交点为:

$$M(\frac{7}{6}-\frac{\sqrt{61}}{6},0),$$

$$N(\frac{7}{6}+\frac{\sqrt{61}}{6},0),$$

即 $M(\frac{7-\sqrt{61}}{6},0),$

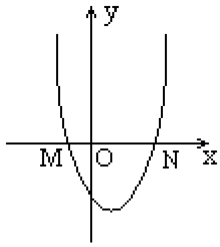
$N(\frac{7+\sqrt{61}}{6},0)$.

当 y>0 时,x 的取值范围为:

$$(-\infty,\frac{7-\sqrt{61}}{6}),(\frac{7+\sqrt{61}}{6},+\infty).$$

当 y<0 时,x 的取值范围为:

$$(\frac{7-\sqrt{61}}{6},\frac{7+\sqrt{61}}{6}).$$

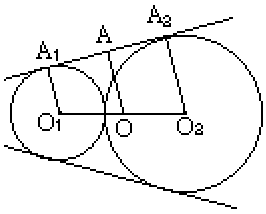


三、证明:设⊙O_1 及⊙O_2 为互相外切的二圆,其中一外公切线为 A_1A_2,切点 A_1 及 A_2(如图),令点 O 为连心线 O_1O_2 的中点,过 O 作 $OA\perp A_1A_2$.

∵ $OA=\frac{1}{2}(O_1A_1+O_2A_2)=\frac{1}{2}O_1O_2$

∴ 以 O_1O_2 为直径,即以 O 为圆心,OA 为半径的圆必与直线 A_1A_2 相切.

同理可证,此圆必切于⊙O_1 及⊙O_2 的另外一条外公切线.



四、解:$\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=(\cos x+\sin x)^2$,

$\cos x+\sin x=(\cos x+\sin x)^2(\cos x-\sin x)$,

$(\cos x+\sin x)(1-\cos^2x+\sin x^2)=0$,

$2(\cos x+\sin x)\cdot\sin^2x=0$,

∴ $\cos x+\sin x=0,\sin^2x=0$.

由方程 $\cos x+\sin x=0$ 得,$\operatorname{tg}x=-1$.

∴ $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$ (k为整数).

由方程 $\sin^2x=0$,得

$x=k\pi$ (k 为整数).

由检验可知

$x=k\pi-\frac{\pi}{4},x=k\pi$ (k为整数)均为方程的通解.

五、解:设直圆锥的高为 h,底面半径为 R,母线长为 l,则

$$\frac{a}{a'}=\frac{\pi R(R+l)}{2\pi R(R+h)}=\frac{R+l}{2(R+h)},$$

∴　$2a(R+h)=a'(R+l)$.

由$R=\sqrt{l^2-h^2}$,代入可得

$$2a(\sqrt{l^2-h^2}+h)=a'(\sqrt{l^2-h^2}+l),$$

$$(2a-a')\sqrt{l^2-h^2}=a'l-2ah.$$

两边同乘以l,可得

$$(2a-a')\sqrt{l-(\frac{h}{l})^2}=a'l-2a\cdot\frac{h}{l}$$

等式两边平方,

$$(4a^2-4aa'+a'^2)\left[l-(\frac{h}{l})^2\right]=a'^2-4aa'\cdot\frac{h}{l}+4a^2(\frac{h}{l})^2,$$

$$(8a^2-4aa'+a'^2)(\frac{h}{l})^2-4aa'\cdot\frac{h}{l}+(4aa'-4a^2)=0.$$

这个关于$\frac{h}{l}$的一元二次方程的判别式

$$\Delta=(-4aa')^2-4(8a^2-4aa'+a^2)(4aa'-4a^2)$$

$$=16a(2a-a')^3>0,$$

∴该一元二次方程有两个实根,解得

$$\frac{h}{l}=\frac{4aa'\pm\sqrt{16a(2a-a')^3}}{2(8a^2-4aa'+a'^2)}$$

$$=\frac{2aa'\pm2(2a-a')\sqrt{a(2a-a')}}{4a^2+(2a-a')^2}.$$

即为圆锥的高与母线的比.