1955年试题

一、下列四题顺次解答,不必抄题（但须写明题号:甲,乙,丙,丁）.结果务须明确,过程可以简单.

甲、以二次方程 $x^2-3x-1=0$ 的两根的平方为两根作一二次方程.

乙、等腰三角形一腰的长是底边的4倍,求这三角形各角的余弦.

丙、已知正四棱锥底边的长为 a,侧棱与底面的交角为 45°,求这棱锥的高.

丁、写出:二面角的平面角的定义.

二、求 b,c,d 的值,使多项式 x^3+bx^2+cx+d 适合下列三条件:

(1)被 x-1 整除;

(2)被 x-3 除时余 2;

(3)被 x+2 除与被 x-2 除时余数相等.

三、由直角三角形勾上一点 D 作弦 AB 的垂线交弦于 E、股的延长线于 F、外接圆周于 Q,求证:EQ 为 EA 与 EB 的比例中项又为 ED 与 EF 的比例中项.

四、解方程 cos2x=cosx+sinx,求 x 的通值.

五、一三角形三边的长成等差级数,其周长为 12 尺,面积为 6 平方尺,求证这三角形为一直角三角形.

1955年试题答案

一、甲、设方程 $x^2-3x-1=0$ 的二根为 α,β,

则 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-1$.

∴ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2(-1)=11$

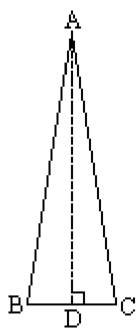
$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-1)^2=1$

∴ 所求的二次方程为 $y^2-11y+1=0$.

乙、设△ABC 中 AB=AC=4BC,AD 为 BC 边上的高,则各角的余弦为:

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{16BC^2+16BC^2-BC^2}{2\cdot 4BC\cdot 4BC}=\frac{31}{32},$$

$$\cos B=\cos C=\frac{CD}{CA}=\frac{\frac{1}{2}BC}{4BC}=\frac{1}{8}.$$



丙、设 S-ABCD 为一正四棱锥,SH 为其高,底边的长为 a,∠SAH=45°,

则 △SHA 为一等腰直角三角形,

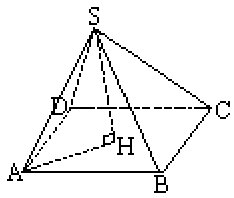
即　SH=AH.

但　AH 为其底的对角线的一半,且其底边的长为 a,

$\therefore\ AH=\frac{a}{2}\sqrt{2},$

$\therefore\ SH=\frac{a}{2}\sqrt{2}.$

丁、自二面角的棱上一点在其各面上作棱的垂线,此二垂线所夹的角叫做该二面角的平面角.



二、解:∵x^3+bx^2+cx+d 可被 x-1 整除.

∴　1+b+c+d=0;　　　　　　①

∵　x^3+bx^2+cx+d 被 x-3 除余 2,

∴　27+9b+3c+d=2;　　　　　②

∵　x^3+bx^2+cx+d 被 x+2 除与被 x-2 除时余数相等,

∴　-8+4b-2c+d=8+4b+2c+d,　　③

由③:　c=-4.

代入①和②:

b+d=3,　　　　　　④

9b+d=-13.　　　　　⑤

由④和⑤:

8b=-16,

b=-2,

d=5.

三、证:连结 QA,QB,则∠AQB 为一直角,而 EQ 为直角三角形 AQB 弦上的高,

∴　EQ 为 EA,EB 的比例中项,

又　∵　∠1=∠2.(均与∠ABF 互余)

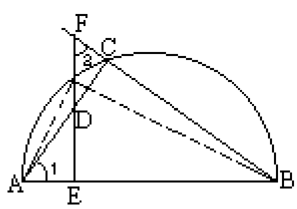
∴　△AED∽△FEB,

∴　EA∶EF=ED∶EB,

∴　EA·EB=EF·ED,

∴　EQ^2=EF·ED,

即　EQ 为 ED 与 EF 的比例中项.



四、解:cos2x=cosx+sinx.

$\cos^2x-\sin^2x=\cos x+\sin x.$

(cosx+sinx)(cosx-sinx-1)=0,

cosx+sinx=0,　①

cosx-sinx-1=0,②

由①： $\tan x=-1$． ∴ $x=n\pi-\frac{\pi}{4}$．

由②： $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\cos(x+\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}$,

$x+\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$,

∴ $x=2n\pi$或$2n\pi-\frac{\pi}{2}$．

五、证明:设△ABC 即此三角形,CA、AB、BC 各边的长为 x 尺,(x-y)尺,(x+y)尺.

则 $x+y+x+x-y=12$ ①

$\sqrt{6[6-(x+y)](6-x)[6-(x-y)]}=6$ ②

由①得 x=4． ③

由②及③得 6(6-4-y)(6-4)(6-4+y)=36,

$12(2-y)(2+y)=36,4-y^2=3,y^2=1$,∴$y=\pm1$,

故此三角形各边的长为 3 尺,4 尺,5 尺.

∵ $3^2+4^2=5^2$

∴ △BAC 为一直角三角形.