1956 年试题

下列各题顺次解答,不必抄题（但须写明题号,例如:Ⅰ甲、Ⅰ乙、Ⅱ、Ⅲ等）.

一、甲、利用对数性质,计算 $\lg^2 5+\lg 2\cdot\lg 50$.

（log 是以 10 为底的对数 $\log_{10}$ 的记号）

乙、设 m 是实数,求证方程 $2x^2-(4m-1)x-m^2-m=0$ 的两个根必定都是实数.

丙、设 M 是△ABC 的边 AC 的中点,过 M 作直线交 AB 直线于 E,过 B 作直线平行于 ME 交 AC 直线于 F.求证△AEF 的面积等于△ABC 的面积的一半.

丁、一个三角形三边的长分别是 3 尺,4 尺及 $\sqrt{37}$ 尺,求这个三角形的最大角的度数.

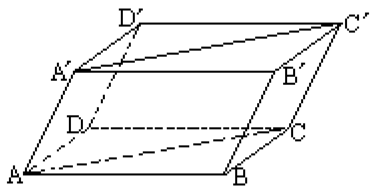
戊、设 $\tan\alpha$ 与 $\tan\beta$ 是方程 $x^2+6x+7=0$ 的两个根,求证 $\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$.

二、解联立方程

$$\begin{cases}7\sqrt{x+y}-x-y=12,\\ x^2+y^2=136.\end{cases}$$

三、设 P 是等边三角形 ABC 外接圆 $\overset{\frown}{BC}$ 上的一点,求证 $PA^2=AB^2+PB\cdot PC$.

四、有一四棱柱体,底面 ABCD 为菱形,∠A'AB=∠A'AD（如右图）,求证平面 A'ACC'垂直于底面 ABCD.



五、若三角形的三个角成等差级数,则其中一定有一个角是 60°;若这样的三角形的三边又成等比级数,则三个角都是 60°,试证明之.

1956 年试题答案

一、甲、解: ∵ $\lg 2=1-\lg 5$, $\lg 50=1+\lg 5$,

原式 $=\lg^2 5+\lg 2\cdot\lg 50=\lg^2 5+(1-\lg 5)(1+\lg 5)=\lg^2 5+1-\lg^2 5=1$.

乙、解:方程的判别式 $\Delta=(4m-1)^2+8(m^2+m)=24m^2+1$,

∵ $m^2\geq 0$, ∴ $\Delta>0$,

所以二个根全是实数.

丙、解:连 BM.

△AEF 的面积=△ABF 的面积+△BEF 的面积,

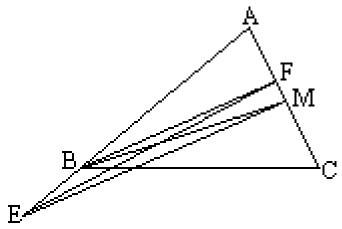
∵ BF∥MF,

∴ △BEF 的面积=△BFM 的面积,

∴ △AEF 的面积=△BAM 的面积.

$\because$ △BAM的面积 $=\dfrac{1}{2}$△ABC的面积,

$\therefore$ △AEF的面积 $=\dfrac{1}{2}$△ABC的面积.

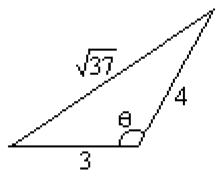


丁、解:最大角对最大边,由余弦定律得

$37=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos\theta$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{9+16-37}{24}=-\dfrac{1}{2}$,

$\therefore\ \theta=120°$.



戊、解:$\tan\alpha+\tan\beta=-6,\tan\alpha\cdot\tan\beta=7$;

$\therefore\ \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{-6}{-6}=1$,

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$.

二、解: $\begin{cases}7\sqrt{x+y}-x-y=12 & (1)\\ x^2+y^2=136 & (2)\end{cases}$

由(1)**移项得** $(x+y)-7\sqrt{x+y}+12=0,$

即 $(\sqrt{x+y}-3)(\sqrt{x+y}-4)=0,$

$\therefore\ \sqrt{x+y}=3,$**或**$\sqrt{x+y})=4.$

两边分别平方,x+y=9,或 x+y=16.

分别与(2)联立:

(Ⅰ)$\begin{cases}x+y=9,\\ x^2+y^2=136;\end{cases}$ (Ⅱ)$\begin{cases}x+y=16,\\ x^2+y^2=136.\end{cases}$

解方程组(Ⅰ),得

(Ⅰ)$\begin{cases}x+y=9,\\ x-y=\sqrt{191};\end{cases}$ (Ⅱ)$\begin{cases}x+y=9,\\ x-y=-\sqrt{191};\end{cases}$

$\begin{cases}x_1=\dfrac{9+\sqrt{191}}{2},\\ y_1=\dfrac{9-\sqrt{191}}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\dfrac{9-\sqrt{191}}{2},\\ y_2=\dfrac{9+\sqrt{191}}{2};\end{cases}$

解方程组(Ⅱ)得

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}x+y=16,\\x-y=4;\end{cases}\qquad(\text{Ⅱ})\begin{cases}x+y=16,\\x-y=-4;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_3=10,\\y_3=6;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_4=6,\\y_4=10;\end{cases}$$

综上述,共得四组解:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{9+\sqrt{191}}{2},\\y_1=\dfrac{9-\sqrt{191}}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\dfrac{9-\sqrt{191}}{2},\\y_2=\dfrac{9+\sqrt{191}}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=10,\\y_2=6;\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=6,\\y_4=10.\end{cases}$$

经检验,以上四组解均为原方程的解.

三、解:令 AP 与 BC 的交点是 M,

∵ ∠APB=∠ABM.

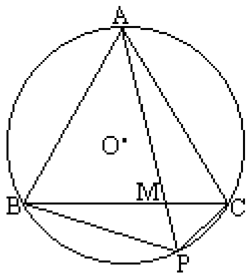
∴ △ABP∽△AMB,∴ AP·AM=AB^2,(1)

∵ ∠APC=∠BPM,∠PAC=∠PBM,

∴ △ACP∽△BMP,∴AP·MP=PB·PC, (2)

(1)+(2),得 AP·AM+AP·MP=AB^2+PB·PC,

即 $AP^2=AB^2$+PB·PC.



四、

解:∵AB = AD ∴AO⊥BD.

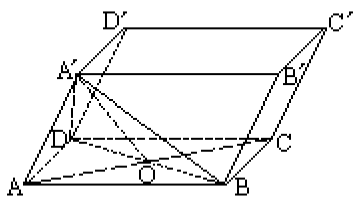
∵ ∠A'AB = ∠A'AD,

∴ △AAB≌△A'AD.

∴ A'B = A'D, ∴ A'O⊥BD,

∴ 平面A'OA⊥BD,

故 平面 A'ACC'⊥ABCD.



五、解:令三角形的三个角是 A,B,C,

由 A-B=B-C,A+B+C=180°,

得 B=60°

设三边的长为 a,aq,aq^2,则长边 aq 的边所对的角即为 60°,
根据余弦定理,

$$(aq)^2=a^2+(aq^2)^2-2a\cdot aq^2\cos60°,$$

$$a^2q^2=a^2+a^2q^4-a^2q^2.$$

∴ $q=\pm1$.但 $q=-1$ 不合题意,
于是此三角形边长各为 a 因而三个角都是 60°.