1957 年试题

试卷上不必抄题,但须写明题号,例如:Ⅰ甲、Ⅰ乙、Ⅱ、Ⅲ等.

一、甲、化简 $(2\frac{7}{9})^{\frac{1}{2}}+0.1^{-2}+(2\frac{10}{27})^{-\frac{2}{3}}$.

乙、求适合不等式 $x^2+x<2$ 的实数 x 的范围.

丙、求证:$\cot 22°30'=1+\sqrt{2}$. **(注)** cot **是余切的符号.**

丁、在四面体 ABCD 中,AC=BD,P、Q、R、S 依次为棱 AB、BC、CD、DA 的中点.求证 PQRS 为一菱形.

戊、设 a、b 为异面二直线,EF 为 a、b 的公垂线,α为过 EF 中点且与 a、b 平行的平面,M 为 a 上任一点,N 为 b 上任一点.求证:线段 MN 被平面α二等分.

(注)"异面二直线"也叫"不共面二直线".

二、解方程组 $\begin{cases}\lg(2x+1)+\lg(y-2)=1\\ 10^{xy}=10^{x}\cdot 10^{y}\end{cases}$

(注)lg 是以 10 为底的对数 $\log_{10}$ 的符号.

三、若△ABC**的内切圆半径为**r,**求证**BC**边上的高**$AD=\dfrac{2r\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$.

四、若△ABC 为锐角三角形,以 BC 边为直径作圆,并从 A 作此圆的切线 AD,与圆切于 D,又在 AB 边上取 AE 等于 AD,并过 E 作 AB 的垂线与 AC 边的延长线交于 F,求证:

(i)AE∶AB=AC∶AF;

(ii)△ABC 的面积=△AEF 的面积.

五、求证:∶方程$x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-q)x+q=0$**的一个根是**1.**设这个方程的三个根是一个**△ABC**的三个内角的正弦**sinA、sinB、sinC,**求**A、B、C**的度数及**q**的数值.**

1957 年试题答案

一、甲、$(2\frac{7}{9})^{\frac{1}{2}}+0.1^{-2}+(2\frac{10}{27})^{-\frac{2}{3}}$

$$=(\frac{25}{9})^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{0.1^2}+\frac{1}{(\frac{64}{27})^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{5}{3}+100+\frac{9}{16}$$

$$=102\frac{11}{48}$$

乙、解:$x^2+x<2$

即　(x+2)(x-1)<0

∴　-2<x<1.

丙、证:∵$\cot 22°30' = \cot\frac{45°}{2}$

$$=\frac{1+\cos 45°}{\sin 45°}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=1+\sqrt{2}$$

丁、证:(如图)

∵　P、Q依次为AB、BC的中点,

∴ PQ平行于AC且等于AC的$\frac{1}{2}$.

同理RS也平行于AC且等于AC的$\frac{1}{2}$.

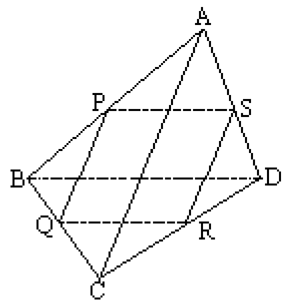
∴　PQ与RS平行且相等.

∴　PQRS为一平行四边形.

又因$AC=BD$,$PQ=\frac{1}{2}AC$, $QR=\frac{1}{2}BD$,

∴　PQ=QR.

∴　PQRS为一棱形.



戊、证:(如图)

过a作平面β与α平行,过b作平面γ与α平行,

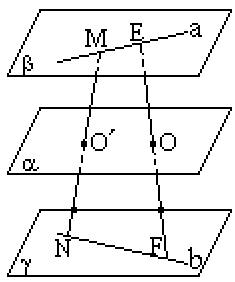
则　α∥β∥γ.

设EF中点为O,MN与α的交点为 O’,

则　MO’∶O’N= EO∶OF.

∵　EO=OF,

∴　MO’= O’N,即线段MN被平面α二等分.



二、解:

$$\begin{cases}\lg(2x+1)+\lg(y-2)=1, & ① \\ 10^{xy}=10^{x}\cdot 10^{y}. & ②\end{cases}$$

由①得：(2x+1)(y-2)=10. ③

由②得：xy=x+y. ④

由③得：2xy-4x+y-12=0. ⑤

⑤—④×2 得：-4x+y-12=-2x-2y,

整理得：2x-3y+12=0,

$\therefore y=\frac{2}{3}x+4$. ⑥

代入④得：$x(\frac{2}{3}x+4)=x+\frac{2}{3}x+4$，

即 $\frac{2}{3}x^{2}+\frac{7}{3}x-4=0$，

即 $2x^{2}+7x-12=0,$

∴ $x=\frac{-7\pm\sqrt{49+96}}{4}=\frac{-7\pm\sqrt{145}}{4}$.

代入⑥得：$y=\frac{17\pm\sqrt{145}}{4}$.

∵ $\sqrt{145}>12$，

∴ 当 $y=\frac{17-\sqrt{145}}{4}$ 时, $y-2<0$ 不合原题.

∴ 原方程组的解为：$\begin{cases}x=\frac{-7+\sqrt{145}}{4}, \\ y=\frac{17+\sqrt{145}}{4}.\end{cases}$

三、证明:（如图）

设 O 为△ABC 的内切圆心,E 为 AB 边上的切点,连结 OB、OA 与 OE,则 OB、OA 分别平分∠B、∠A,而 OE⊥AB.

在直角三角形OEB中, $BE=OE\cot\angle EBO=r\cot\frac{B}{2}$，

同理可得 $EA=r\cot\frac{A}{2}$.

$\therefore AB=AE+EB=r(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2})$.

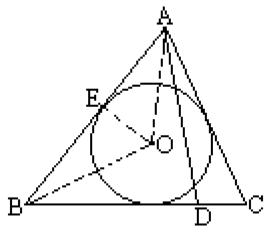
在直角三角形 ADB 中,AD=ABsinB,

$$\therefore AD = r(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2})\sin B$$

$$= r \cdot \frac{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} \cdot 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$= 2r \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{A}{2}} \cdot \cos\frac{B}{2}$$

$$= \frac{2r\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$



四、证明：（如图）

（ⅰ）设 AB 与圆交于 G，则 AG∶AD=AD∶AB.

∵AE=AD，∴AG∶AE=AE∶AB.

连结 GC，则 GC∥EF，∴　AG∶AE=AC∶AF.

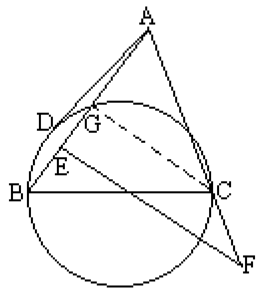
∴AE∶AB= AC∶AF.

（ⅱ）　∵AE∶AB= AC∶AF，∴AB·AC=AE·AF.

∵△ABC 与△AEF 有公共角∠A，

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle AEF} = \frac{AB \cdot AC}{AE \cdot AF} = 1,$$

∴△ABC 的面积=△AEF 的面积.



五、解：将1**代入原方程得**$1-(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-q)+q=0$**，故**$1$**适合原方程，**

故知原方程有一个根是1.

原方程现有一根是1**，所以它的左端可以析出**$x-1$**的因式，而得**

$$(x-1)(x^2-\sqrt{2}x-q)=0$$

又因这个方程的三个根是 sinA、sinB、sinC,所以这三个之中必定有一个是1,设 sinC=1,则 C=90°.

并且$\sin A$、$\sin B$是方程$x^2-\sqrt{2}x-q=0$的两个根.

由根与系数的关系知$\sin A+\sin B=\sqrt{2}$. ①

由于$A+B=90°$, ∴$\sin^2A+\sin^2B=1$. ②

①²—②得 $2\sin A\sin B=1$. ③

②—③得 $(\sin A-\sin B)^2=0$.

∴ $\sin A=\sin B$.

∴ $A=B=45°$.

由根与系数的关系及③知 $-q=\mathrm{Sin}A\sin B=\frac{1}{2}$,

∴ $q=-\frac{1}{2}$.