一九五八年全国高等学校招生数学试题

一、若$tan\alpha=\frac{1}{2}$，$tan\beta=\frac{1}{3}$，并且α与β均为锐角。

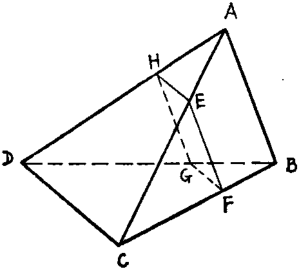
求证：$\alpha+\beta=45°$。

二、问k取何值时，二次方程$(2k-1)x^2+(k+1)x+k-4=0$才有等根。

三、求$(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}$式中$x^8$项的系数，（不必求出其它各项系数）。

四、设一四面体被一平面所截，若截面为一平行四边形，则此截面平行于四面体的两条棱。

五、设三角形ABC中，角A的外角平分线与BC边之延长线交于D，与外接园周交于E，则：$AB\cdot AC=AE\cdot AD$。



六、设有互相外切的二圆，半径各为a与b（$a>b$），作此二圆的两条外公切线，设其夹角为A，证明：

$$\sin A=\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}。$$

七、在三角形ABC中，r、R分别为其内切圆与外接圆的半径。求证：

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}。$$

八、解方程：

$$\sqrt[3]{4a^3+x}+\sqrt[3]{4a^3-x}=2a。$$

一九五八年全国高等学校招生
数 学 试 题 解 答

一、

解： $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{5}=1$$

又因 α、β 均为锐角，因而 $0°<\alpha+\beta<180°$，于是从 $\tan(\alpha+\beta)=1$ 必有 $\alpha+\beta=45°$。

二、

解：若方程有等根，则必：

$$(k+1)^2-4(2k-1)(k-4)=0,$$

即 $7k^2-38k+15=0$，

从而得 $k=5$，$k=\dfrac{3}{7}$。

三、

解法一：含 x^8 的项只能在 $(1+x)^8$, $(1+x)^9$, $(1+x)^{10}$ 的展开式中。

在 $(1+x)^8$ 的展开式中，x^8 的系数为 $C_8^8=1$；

在 $(1+x)^9$ 的展开式中，x^8 的系数为 $C_9^8=9$；

在 $(1+x)^{10}$ 的展开式中，x^8 的系数为 $C_{10}^8=45$；

∴ 所求系数为 $C_8^8+C_9^8+C_{10}^8=55$。

解法二：由等比级数求和公式得

$$(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}$$

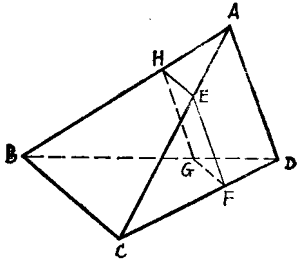
$$=\frac{(1+x)^{11}-(1+x)}{x}$$

$$=\frac{x^{11}+11x^{10}+55x^9+\cdots+11x+1-1-x}{x}$$

$$=x^{10}+11x^9+55x^8+\cdots+10$$

∴ x^8的系数为55。

四、



证：如图所示，设四面体$ABCD$被一平面所截，截口$EFGH$是平行四边形。

∵ $EF\parallel$ 平面ABD上的直线GH，

∴ $EF\parallel$平面ABD。又平面ACD过直线EF且AD为平面ABD与平面ACD的交线，

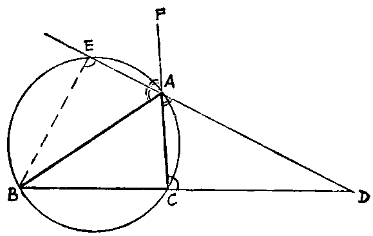
∴ $EF\parallel AD$，从而$AD\parallel$平面$EFGH$，

同理可证$BC\parallel$平面$EFGH$。

五、

证 ∵ $\angle BAE=\angle EAF$，又$\angle EAF=\angle DAC$

∴ $\angle BAE=\angle DAC$，



又 $\angle BEA=\angle DCA$。

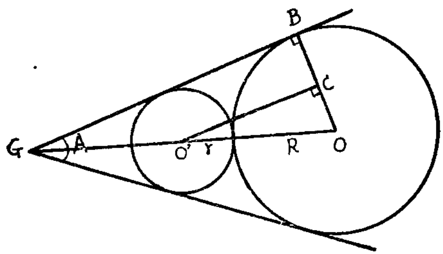
$\therefore\quad \triangle BEA \backsim \triangle DCA$，从而有

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC},$$

$\therefore\quad AB \cdot AC = AE \cdot AD$。

六：

证：连两圆的联心线OO'延长之，由对称性知，OO'必通过两条外公切线的交点G。(如图)GB与$\odot O$切于B，连OB，则OB为$\odot O$的半径等于a，且$OB\perp GB$，过O'作$O'C\parallel GB$交OB于C。则$OC=a-b$，且$OC\perp O'C$。



$$\therefore\quad \sin\angle co'o=\quad \sin\frac{A}{2}=\frac{a-b}{a+b},$$

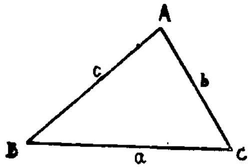
$$\therefore\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{A}{2}},$$

$$(\because\ \frac{A}{2}<90^\circ)\ 。$$

即 $$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{1-(\frac{a-b}{a+b})^2}\quad=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b},$$

$$\therefore\quad \sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)}\ 。$$

七、证：设△为三角形 ABC 的面积，p 为三角形周长之半。



$\because$ $r=\frac{\Delta}{p}$ 即 $rp=\Delta$，但

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$=\frac{1}{2}(2R\sin A+2R\sin\beta+2R\sin C)$$

$$=R(\sin A+\sin B+\sin C)\ ,$$

又 $\Delta=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot 2R\sin A\cdot 2R\sin C\cdot\sin B$

$$=2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot si C。$$

代入 $rp=\Delta$ 中，有

$$r=\frac{\Delta}{p}=\frac{2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{R\ (\sin A+\sin B+\sin C)}$$

$$=\frac{2R\cdot 2^3\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\left(\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)}$$

$$=\frac{R\cdot 2^3\cdot\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}}$$

$$=\frac{2^3\cdot R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}。$$

八、

解：将原方程两边立方得：

$$(4a^3+x)+(4a^3-x)+3\left[\sqrt[3]{(4a^3+x)^2(4a^3-x)}+\sqrt[3]{(4a^3+x)(4a^3-x)^2}\right]=3a^3$$

$$\therefore\quad 3\sqrt[3]{(4a^3+x)(4a^3-x)}\left[\sqrt[3]{4a^3+x}+\sqrt[3]{4a^3-x}\right]=0。$$

将原方程之值代入得：$6a\sqrt[3]{(4a^3+x)(4a^3-x)}=0$，而 $a\neq 0$（若 $a=0$，则任何 x 皆满足方程），故有 $x=\pm 4a^3$，验算之，均满足原方程，所以都是原方程的解。