四、云南高等学校

1、解方程　$(\text{Log}X^{\sqrt{5}})^2+\text{Log}X^5-\frac{5}{4}=0$

2、求（$1+X$）+（$1+X)^2+\cdots\cdots+(1+X)^{10}$式中$X^8$项的系数（不必求出其它各项的系数）。

3、求元锥割线$2x^2-8xy-4y^2-4y+1=0$之焦点及准线。

4、求元锥割线　$X^2+y^2=49$　及　$X^2+y^2-20y+91=0$　之公切线。

5、设一四面体为一平面所截，若截面是平行四边形，则此截面平行于四面体的两条稜。

6，设三角形ABC中，∠A的外角平分线与BC边之延长线相交于D，与外接元周交于E，则$AB\cdot AC=AE\cdot AD$。

7、设有互相外切的二元的半径各为α与b（$\alpha>b$），作此二元的两外公切线，设其夹角为A，

证明：$\sin A=\frac{4(\alpha-b)\sqrt{\alpha b}}{(\alpha+b)^2}$

8、在三角形ABC中：r与R分别为其内切元与外接元的半径，求证：

$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$　。

题　解：

1、解：$(\text{Log}X^{5\frac{1}{2}})^2+\text{Log}X^5-\frac{5}{4}=0$，　即　$\frac{1}{4}(\text{Log}X^5)^2+\text{Log}X^5-\frac{5}{4}=0$

即　$(\text{Log}X^5)^2+4\text{Log}X^5-5=0$，　分解因式得：

$(\mathrm{Log}X^5-1)(\mathrm{Log}X^5+5)=0$

当 $\mathrm{Log}X^5-1=0$ 时， $\mathrm{Log}X^5=1$ $\therefore X_1=5$

又 $\mathrm{Log}X^5+5=0$ 时， $\mathrm{Log}X^5=-5$， $X^{-5}=5$

$\frac{1}{x^5}=5$， $X^5=\frac{1}{5}$ $\therefore X_2=\sqrt[5]{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt[5]{625}}{5}$

代入原方程检验，两个根均适合，故 $X_1=5$； $X_2=\frac{\sqrt[5]{625}}{5}$

2、解：原式十项中，只有后三项才有含X^8的项，由二项式定理通证公式：

$(1+X)^8$中，X^8的系数为1。

$(1+X)^9$中，X^8的系数为$C_9^8=C_9^1=9$，

$(1+X)^{10}$中，X^8的系数为$C_{10}^8=C_{10}^2=\frac{10\times 9}{1\times 2}=45$

故原式中X^8的系数为$1+9+45=55$

3，解： 因$A=2$，$B=-8$，$C=-4$

判别式$\Delta=B^2-4A\cdot C=(-8)^2-4\times 2(-4)=64+32=96>0$

故图形为双曲线型，先移轴，后转轴。

令 $X=x'+a$，$y=y'+b$代入原方程式得：

$2(x'+a)^2-8(x'+a)(y'+b)-4(y'+b)^2-4(y'+b)+1=0$

$2(x'^2+2ax'+a^2)-8(x'y'+bx'+ay'+ab)-4(y'^2+2by'+b^2)-4(y'+b)+1=0$

$2x'^2-8x'y'-4y'^2+(4a-8b)x'-(8a+8b+4)y'$

$+(2a^2-8ab-4b^2-4b+1)=0$ ………………………………………… (1)

消去一次项，解方程组 $\begin{cases}4a-8b=0\\ 8a+8b+4=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{3}\\ b=-\frac{1}{6}\end{cases}$

代入（1）式得：$2x'^2-8x'y'-4y'^2+[2(-\frac{1}{3})^2-8(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{6})-4(-\frac{1}{6})^2$
$-4(-\frac{1}{6})+1]=0$

化简 $2x'^2-8x'y'-4y'^2+(\frac{2}{9}-\frac{4}{9}-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}+1)=0$

$2x'^2-8x'y'-4y'^2+\frac{4}{3}=0$

即 $3x'^2-12x'y'-6y'^2+2=0$ ………………………………………… (2)

在（2）式中，$A\neq C$，$A=3$，$C=-6$，$B=-12$

$\mathrm{tg}\,2\theta=\frac{B}{A-C}=\frac{-12}{3-(-6)}=-\frac{4}{3}$

$\cos 2\theta=-\frac{3}{5}$

$\because$ $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$

$\therefore$ $\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-(-\frac{3}{5})}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{8}{5}\times\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$。

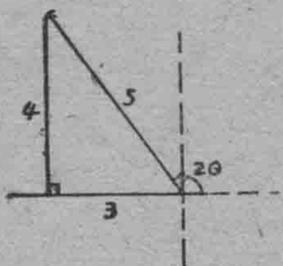

图105

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

由转轴公式：$x'=x''\cos\theta-y''\sin\theta$,

$y'=x''\sin\theta+y''\cos\theta$,

代入得：$X'=\frac{x''}{\sqrt{5}}-\frac{2y''}{\sqrt{5}}=\frac{x''-2x''}{\sqrt{5}}$,

$y'=\frac{2x''}{\sqrt{5}}+\frac{y''}{\sqrt{5}}=\frac{2x''+y''}{\sqrt{5}}$ 代入（2）得：

$$3\left(\frac{x''-2y''}{\sqrt{5}}\right)^2-12\left(\frac{x''-2y''}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{2x''+y''}{\sqrt{5}}\right)-6\left(\frac{2x''+y''}{\sqrt{5}}\right)^2+2=0$$

化简 $3(x''^2-4x''y''+4y''^2)-12(2x''^2-3x''y''-2y''^2)$

$-6(4x''^2+4x''y''+y''^2)+10=0$

$-45x''^2+30y''^2+10=0$，即 $9x''^2-6y''^2=2$

即 $\frac{x''^2}{\frac{2}{9}}-\frac{y''^2}{\frac{1}{3}}=1$ ……………………………………（3）

在（3）式中，$\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$b=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$$c=\sqrt{\alpha^2+b^2}=\sqrt{\frac{2}{9}+\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

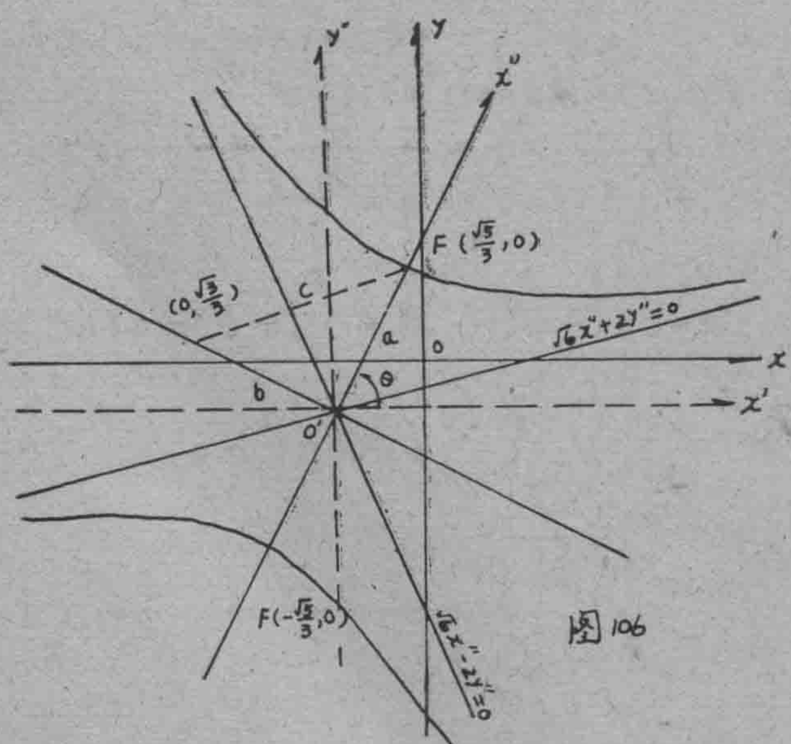

图106

在$x''oy''$坐标系中，双曲线的焦点为

$F\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, O\right)$，$F'\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, O\right)$

渐近线方程为 $y''=\pm\frac{b}{\alpha}x''$

$=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{3}{\sqrt{2}}x''=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x''$

$=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}X''$

即：$\begin{cases} y''=\frac{\sqrt{6}}{2}X'' \\ y''=-\frac{\sqrt{6}}{2}X'' \end{cases}$

或 $\begin{cases} \sqrt{6}x''-2y''=0 \\ \sqrt{6}x''+2y''=0 \end{cases}$

4，解：设所求公切线为 $y=kx+b$， 即$kx-y+b=0$，因前一方程的图象以原点为元心，半径为7的园，后一方程可改写为

$X^2+(y^2-20y+10^2)=9$，即$X^2+(y-10)^2=3^2$

这是以（O，10）为园心半径为3的园。

由切线到元心的距离等于半径，于是有

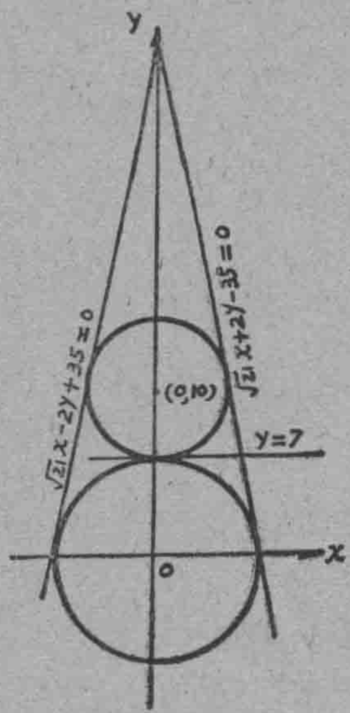

图107

$$7=\frac{|k\times 0-1\times 0+b|}{\pm\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|b|}{\sqrt{k^2+1}} \cdots\cdots (1)$$

$$3=\frac{|k\times o-1\times 10+b|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|-10+b|}{\sqrt{k^2+1}} \cdots\cdots (2)$$

将（1），（2）式联立解之：

（1）式去分母，两边平方得：

$$46(k^2+1)=b^2 \cdots\cdots (3)$$

（2）式去分母，两边平方得：

$$9(k^2+1)=(b^2-2ob+100) \cdots\cdots (4)$$

（4）×49－（3）×9　得：

$$49(b^2-20b+100)-9b^2=0$$

$40b^2-980b+4900=0$，　化简得　$2b^2-49b+245=0$

$$b=\frac{49\pm\sqrt{(-49)^2-4\times 2\times 245}}{2\times 2}=\frac{49\pm\sqrt{2401-1960}}{4}=\frac{49\pm\sqrt{441}}{4}=\frac{49\pm 21}{4}$$

$$=\frac{35}{2} \text{ 和 } 7$$

当　$b=\frac{35}{2}$时，代入（3）式得：$49(k^2+1)=(\frac{35}{2})^2$

$$=\frac{1225}{4}\times\frac{1}{49}-1=\frac{25}{4}-1=\frac{21}{4},\quad K=\sqrt{\frac{21}{4}}=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}$$

又当 $b=7$ 时，代入（3）式得：$49(k^2+1)=7^2$，$k^2=\frac{49}{49}-1$，∴　$K=0$

故方程组（1）与（2）的解为 $\begin{cases} b=\frac{35}{2} \\ k=\frac{\sqrt{21}}{2}\end{cases}$　$\begin{cases} b=\frac{35}{2} \\ k=-\frac{\sqrt{21}}{2}\end{cases}$　$\begin{cases} b=1 \\ k=0\end{cases}$

于是所求切线方程为　$y=7$（内公切线）；

$$\begin{cases} y=\frac{\sqrt{21}}{2}X+\frac{35}{2} \\ y=\frac{\sqrt{21}}{-2}X+\frac{35}{2}\end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} \sqrt{21}x-2y+35=0 \\ \sqrt{21}x+2y-35=0\end{cases} \quad \text{（外公切线），}$$

5、证：假设四面体ＡＢＣＤ为一平面所截，其截面ＥＦGH为一平行四边形，

∵　ＥＦ∥HG（已知）

∴　ＥＦ∥平面ＢＣＤ（一平面含有两平行线之一，则与它一线平行）。

故　$EF /\!/ BC$（平行于一平面的直线，亦平行于此平面与过此直线的任何平面的交点），

∴　平面$EFGH /\!/ BC$　（一平面含有两平行线之一，则与它一线平行）。

同理可证　平面$EFGH /\!/ AD$

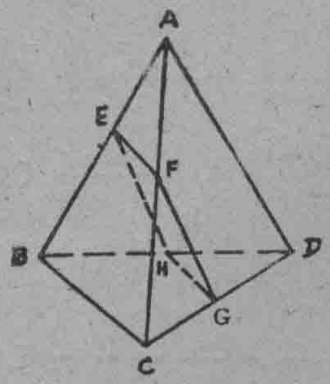

图108

6、证：连接BE，$\angle BAE = \angle DAF$（对顶角相等），

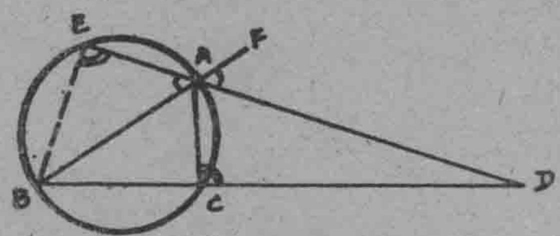

图109

$\angle CAD = \angle DAF$（AD为$\angle CAF$的平分线）

∴　$\angle BAE = \angle CAD$

∵　四边形$ACBE$内接于元，

∴　$\angle AEB + \angle ACB = 180°$，

但　$\angle ACB + \angle ACD = 180°$

∴$\angle AEB = \angle ACD$，由此$\triangle ABE \backsim \triangle ADC$

∴　$\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AC}$，　　故　$AB \cdot AC = AE \cdot AD$。

7、证：如图所示：

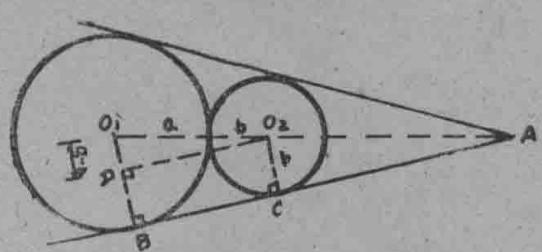

图110

在直角三角形O_1DO_2中，

$$DO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1D^2}$$

$$= \sqrt{(\alpha + b)^2 - (\alpha - b)^2}$$

$$= \sqrt{4\alpha b} = 2\sqrt{\alpha b}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{\alpha - b}{\alpha + b}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{\alpha b}}{\alpha + b}$$

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 2 \times \frac{\alpha - b}{\alpha + b} \times \frac{2\sqrt{\alpha b}}{\alpha + b} = \frac{4(\alpha - b)\sqrt{\alpha b}}{(\alpha + b)^2}$$

8、证：如图，$\odot o$为$\triangle ABC$之内切元，D为AB边上的切点，连接OA，OB，OD，　　则　$OD \perp AB$，$OD = \gamma$

在直角三角形AOD中，　　$\text{ctg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{AD}{OD}$

∴　$AD = \gamma\,\text{ctg}\dfrac{A}{2}$ ………………………………………………（1）

又在直角三角形BOD中，　$\text{ctg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{BD}{OD}$

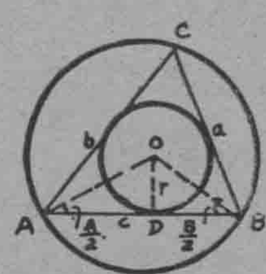

图111

$$\therefore \quad BD = \gamma \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由（1）+（2）得 $c = AB = AD + BD = \gamma \operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \gamma \operatorname{ctg}\frac{B}{2}$

$$= \left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\right)\gamma = \left(\frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}\right)\gamma$$

$$= \gamma\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$\therefore A + B + C = 180° \qquad \frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

以（4）代入（3）得 $C = \gamma\frac{\sin\left(90° - \frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} = \gamma\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$

由正弦定理知： $\frac{c}{\sin C} = 2R$

$$\therefore \quad c = 2R\sin C = 2R\sin 2\left(\frac{C}{2}\right) = 4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

以（6）代入（5）得 $4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = \gamma\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$

化简得 $\gamma = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$。