一九五八年

一、

1. 解方程$x-5=\sqrt{x+7}$　　（5分）

解　由原方程得：$x^2-10x+25=x+7$

∴　$x^2-11x+18=0$

$(x-2)(x-9)=0$

$x_1=2$，$x_2=9$.

经检验$x=2$是增根，$x=9$是原方程的解.

2. 已知$lg2=0.3010$，试利用对数性质判定$2^7\cdot 8^{11}\cdot 5^{10}$是几位数.　　（5分）

解　$lg2^7\cdot 8^{11}\cdot 5^{10}=lg2^7\times 2^{33}\times(10^{10}\div 2^{10})$

$=lg2^{30}\times 10^{10}$

$=30lg2+10$

$=9.030+10$

$=19.03$

∴　$2^7\cdot 8^{11}\cdot 5^{10}$是20位数字的数.

3. 由50个不同的元素中选47个，问有多少种选法？

（6分）

解　$C_{50}^{47}=C_{50}^{3}=\dfrac{50\times 49\times 48}{3\times 2\times 1}=19600$（种）.

4. 求$tg\left(arc\,tg\dfrac{5}{6}-arc\,tg\dfrac{3}{8}\right)$之值　　（6分）

解　令$arc\,tg\dfrac{5}{6}=\alpha$，　　　$arc\,tg\dfrac{3}{8}=\beta$

$\therefore\quad tg\alpha=\dfrac{5}{6}$，　$tg\beta=\dfrac{3}{8}$.

而　$tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}=\dfrac{\dfrac{5}{6}-\dfrac{3}{8}}{1+\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{3}{8}}=\dfrac{22}{63}$

$\therefore\quad tg\left(arc\,tg\dfrac{5}{6}-arc\,tg\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{22}{63}$.

又解　原式$=\dfrac{tg\left(arctg\dfrac{5}{6}\right)-tg\left(arctg\dfrac{3}{8}\right)}{1+tg\left(arctg\dfrac{5}{6}\right)\cdot tg\left(arctg\dfrac{3}{8}\right)}$

$$=\frac{\dfrac{5}{6}-\dfrac{3}{8}}{1+\dfrac{5}{6}\times\dfrac{3}{8}}.$$

$$=\frac{22}{63}.$$

5. 在$\triangle ABC$中，已知$\angle A=135°$，$\angle B=15°$，$C=1$。问三角形的最大边长是多少？　　（6分）

解　$\angle C=180°-(135°+15°)=30°$

$$\frac{BC}{s\,n135°}=\frac{1}{sin30°}$$

最大边　$BC=\dfrac{sin135°}{sin30°}=\dfrac{sin45°}{sin30°}=\sqrt{2}$。

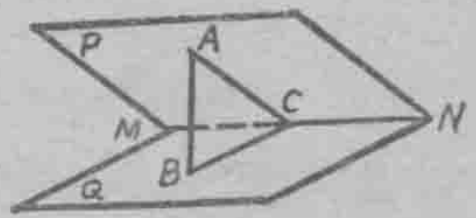
6. 过球面上的两个不同点能作几个大圆？为什么？

(6分)

答：如果这两个点的连线不过球心，只能作一个大圆，因为两个不同的点与圆心只决定一个平面，这个平面与球只交出一个大圆．如果球心在两点的连线上，那么过这条直线可作无数个平面、与球交出无数个大圆．

7. 自30°的二面角的一个面上一点A作另一个面的垂线，垂足是B，若已知AB的长是a，求A点到二面角的棱的距离 (6分)

解 作$BC\perp MN$，



连接AC，

则 $AC\perp MN$（三垂线定理）

$\therefore$ $\angle ACB$是二面角的平面角

$\angle ACB=30°$

在直角$\triangle ABC$中，

$AB=a$，$\angle ACB=30°$，$\angle ABC=90°$

$\therefore$ $AC=2a$（直角三角形中，斜边是30°角所对边长的二倍）．

8. 已知二次函数$y=3+2x-x^2$ (15分)

(1) 问x在什么范围内$y>0$？又x在什么范围内$y<0$？

解 由$3+2x-x^2>0$

得 $x^2-2x-3<0$

$(x+1)(x-3)<0$

$\therefore$ $-1<x<3$

由 $3+2x-x^2<0$

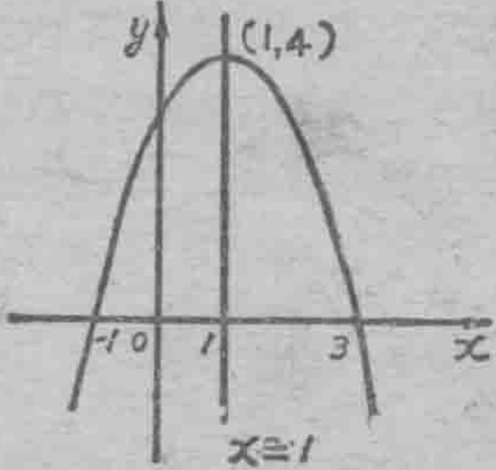
得 $x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$

$\therefore\ x<-1 \quad x>3$

$\therefore$ 当x在$(-1, 3)$范围内$y>0$，

而 x在$(-\infty, -1)$，$(3, +\infty)$的范围内 $y<0$，



（2）求出这个函数图象的顶点坐标和对称轴方程，

证 $y=3+2x-x^2$

$=-(x-1)^2+4$

顶点(1，4)

对称轴方程$x=1$

（3）画出这个函数的图象.

三、设$\sin\alpha$和$\sin\beta$是方程

$$x^2-\left(\sqrt{2}\cos 20^\circ\right)x+\left(\cos^2 20^\circ-\frac{1}{2}\right)=0$$ 的两根，

其中α，β是锐角，求α，β的度数 （15分）

解 $$x=\frac{\sqrt{2}\cos 20^\circ \pm \sqrt{2\cos^2 20^\circ-4\cos^2 20^\circ+2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cos 20^\circ \pm \sqrt{2(1-\cos^2 20^\circ)}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 20^\circ \pm \sin 20^\circ)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 70^\circ \pm \sin 20^\circ).$$

不妨令 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin70^\circ+\sin20^\circ)$

$=\sqrt{2}\sin45^\circ\cdot\cos25^\circ$

$=\cos25^\circ$

$=\sin65^\circ$

∴ $\alpha=65^\circ$

$\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin70^\circ-\sin20^\circ)$

$=\sqrt{2}\cos45^\circ\cdot\sin25^\circ$

$=\sin25^\circ$

∴ $\beta=25^\circ$.

四、有甲、乙两容器，甲容器是直圆柱形，高 2 寸，底半径 1 寸，乙容器是直圆锥形（锥底向上）高 2 寸，底面半径 $2\sqrt{3}$ 寸，若将甲容器灌满水，然后把甲容器的一部分水倒入乙容器使得甲乙两容器的水面一样高，问这时水面的高度是多少？ （15分）

解 设甲容器的容积为V，

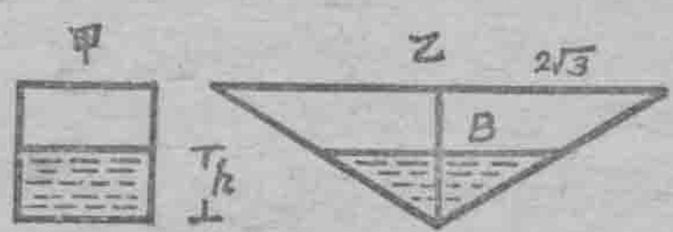
甲倒入乙剩下来的体积为V_1，

倒入乙容器内水的体积为V_2，

并设这时水面高度为h

∴ 乙容器内水面的半径R为

$$\frac{R}{2\sqrt{3}}=\frac{h}{2}.$$



∴ $R=\sqrt{3}h$.

$V_1=\pi\cdot1^2\cdot h=\pi h$

$$V_2=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{3}h)^2\cdot h=\pi h^3$$

而 $V_1+V_2=V$

即 $\pi h+\pi h^3=\pi\cdot 1^2\cdot 2=2\pi$

故 $h^3+h-2=0$

令 $f(h)=h^3+h-2$

∵ $f(1)=0$

∴ $h=1$是方程$h^3+h-2=0$的一个根.

故 $h^3+h-2=(h-1)(h^2+h+2)=0$

而方程$h^2+h+2=0$，无实根.

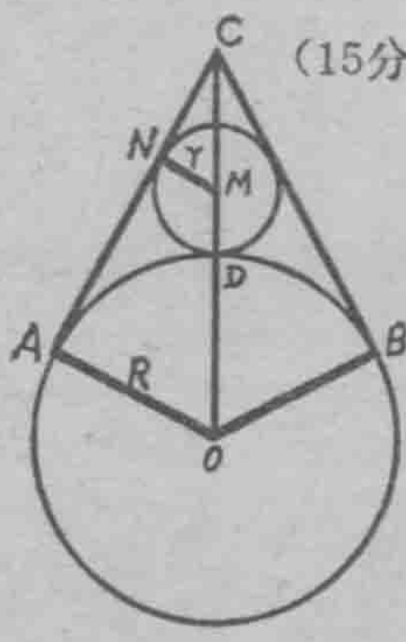
故 $h^3+h-2=0$只有一个实数根

$h=1$.

故甲乙容器水面一样高时

这时水面高度是1寸.

五、已知$\overset{\frown}{AB}$是⊙O上含120°的弧，过A、B两点所引⊙O的切线交于C，⊙M是与$\overset{\frown}{AB}$、AC、BC都相切的圆，求证⊙M的周长等于⊙O的周长的$\frac{1}{3}$.（15分）



证明 ∵ $\overset{\frown}{AB}$是120°

∴ $\angle AOC=60°$

∴ $\angle ACO=30°$

∴ $OC=2R$（在直角△中，斜边等于30°角所对边长的2倍）

∴ $CM=2R-(R+r)=R-r$

$\triangle CNM \backsim \triangle AOC$

$\therefore \quad \dfrac{r}{R}=\dfrac{R-r}{2R} \qquad\qquad \therefore \quad r=\dfrac{R}{3}$.

设 $\odot M$的周长为$C_{\odot M}$.

$\odot O$的周长为$C_{\odot O}$

$\therefore \quad C_{\odot M}=2\pi r=2\pi\cdot\dfrac{R}{3}=\dfrac{2\pi R}{3}=\dfrac{C_{\odot O}}{3}$.