三、华东高等学校

1、设方程 $x^2-(m-2)x-(m-6)=0$ 有二个不相等实根，决定m范围。

2、解 $\begin{cases}\frac{1}{2}Lgx+\frac{1}{2}Lgy-Lg(4-\sqrt{X})=0 & \cdots\cdots(1)\\ (25^{\sqrt{x}})^{\sqrt{y}}-125\times 5^{\sqrt{y}}=0 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$

3、一九五七年我国钢产量约500万吨，同年英国钢产量2000万吨，根据英国每年平均增长率为4.24%，如果我国准备四年在钢的产量方面赶上英国，问每年平均增产的百分率是多少（精确到0.01）。

4、设有函数 $y=\alpha x^2+bx+c$，当 $x=1$ 时，$y=-1$；当 $x=2$ 时，$y=1$；又当 $x=-2$ 时，$y=17$。

A）决定这函数式； B）、这函数有无极大值或极小值？如果有，其值是什么？

C）当X是什么值时，这函数值为O？ **D) 作出函数图像**

5、河的对岸有A，B两点，要在这边测量A，B间的距离，应该怎样测量？试拟出一种方法来说明之，并写出表达距离的式子。（即把能测得的角和能量得的距离的数值表示A，B间的距离）。

6、两平行线L_1与L_2分别和已知元相切于A与B点，作已知元的任一切线L_3，与L_1、L_2分别相交于C与D点，证明乘积$\overline{AC}\cdot\overline{BD}$是常量。

7、设平面S上有一直角三角形ABC，已知一个直角边长为18分米，在平面S外取一点P，使它与A，B，C三点等距离，且设从P点到平面S的距离为40分米，求P点到另一直角边的距离。

题　解：

1、解：判别式　$\triangle=b^2-4ac=[-(m-2)]^2-4\times1\times[-(m-6)]$

$$=(m^2-4m+4)+4m-24=m^2-20$$

由一元二次方程有二不相等实根之条件：$\triangle>0$

即$m^2-20>0$　　$|m|>20$

$\therefore$　$m>\sqrt{20}$　或　$m<-\sqrt{20}$

2、解：由（1）式　$Lg\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{4-\sqrt{x}}=Lg1$　即　$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=4-\sqrt{x}$

$$\therefore\ \sqrt{x}=\frac{4}{1+\sqrt{y}}\cdots\cdots\cdots(3)$$

又由（2）式　$5^{2\sqrt{X}\cdot\sqrt{Y}}-5^{3+\sqrt{Y}}=0$，即　$5^{2\sqrt{X}\cdot\sqrt{Y}}=5^{3+\sqrt{Y}}$

$$\therefore\ 2\sqrt{X}\cdot\sqrt{Y}=3+\sqrt{Y}\cdots\cdots\cdots(4)$$

以（3）代入（4）　$\dfrac{8\sqrt{Y}}{1+\sqrt{Y}}=3+\sqrt{Y}$

化简　$8\sqrt{Y}=(3+\sqrt{Y})(1+\sqrt{Y})=3+4\sqrt{Y}+Y$

即　$Y-4\sqrt{Y}+3=0$，　分解因式得$(\sqrt{Y}-1)(\sqrt{Y}-3)=0$

当　$\sqrt{Y}-1=0$时，　$\sqrt{Y}=1$，　$\therefore$　$Y_1=1$

又　$\sqrt{Y}-3=0$时，　$\sqrt{Y}=3$，　$\therefore$　$Y_2=9$

将$\sqrt{Y}$之值代入（3）式　$\therefore$　$\sqrt{X_1}=\dfrac{4}{1+\sqrt{y_1}}=\dfrac{4}{1+1}=2$　　$\therefore$　$X_1=4$

又　$\sqrt{X_2}=\dfrac{4}{1+\sqrt{Y_2}}=\dfrac{4}{1+3}=1$　　$\therefore$　$X_2=1$

将X_1，X_2，Y_1，Y_2之值代入原方程检验适合，故

原方程组的解为　$\begin{cases}x_1=4\\y_1=1\end{cases}$　和　$\begin{cases}x_2=1\\y_2=9\end{cases}$

3、解：设我国的钢产量每年平均增长率为X，由题意得

$500(1+X)^4=2000(1+4.24\%)^4$

即　$\left(\dfrac{1+X}{1+0.0424}\right)^4=2^2$，　因　$X>0$，　$\therefore$　$1+X>0$

将上式两边开四次方（只取正）得　$\dfrac{1+X}{1+0.0424}=\sqrt{2}$，　故：

$X=\sqrt{2}\times 1.0424-1\approx 0.4739=47.39\%$

4、解：A）、由题意：

$f(1)=\alpha+b+c=-1$ ………………………………………………………………（1）

$f(2)=4\alpha+2b+c=1$ ……………………………………………………………（2）

$f(-2)=4\alpha-2b+c=17$ …………………………………………………………（3）

（2）－（3）：　$4b=-16$　∴　$b=-4$

（2）－（1）：　$3\alpha+b=2$　∴　$\alpha=\dfrac{2-b}{3}=\dfrac{2+4}{3}=2$

将　$\alpha=2$，$b=-4$ 代入（1）式得 $c=-1-\alpha-b=-1-2+4=1$

故　函数式为　$y=2x^2-4x+1$

B）、已知　$y=2x^2-4x+1=2(x^2-2x)+1=2(x^2-2x+1)+1-2$

$=2(x-1)^2-1$

∵　$(x-1)^2$ 为正，　∴　$x=1$ 时，有极小值 -1。

这是顶点为（1，－1），对称轴为 $X=1$，开口向上的抛物线，故有极小值。

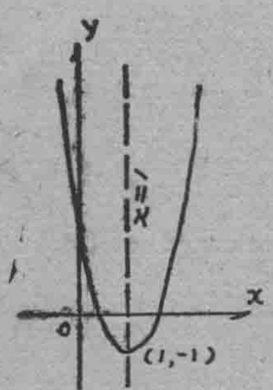

图101

C）、令 $y=0$，即　$2x^2-4x+1=0$

∴　$X=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times 2\times 1}}{2\times 2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-8}}{4}$

$=\dfrac{4\pm\sqrt{2}\times 2}{4}=1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

≈ 1.707 或 0.293

即当　$X=1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，函数值为 0。

5、解：

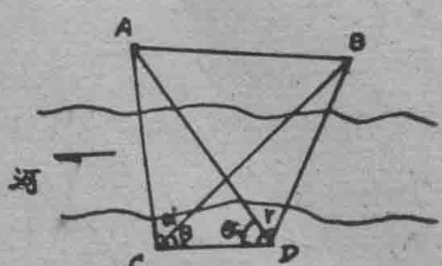

图102

如图，在河的这边地势较平坦处选取 C，D 两点，使从 C，D 两点都能看见 A，B，并且能量得 $CD=\alpha$（C，D 一般叫基线）。

假设测得：$\angle ACD=a$，$\angle BCD=\beta$，

$\angle BCD=\gamma$，$\angle ADC=\theta$，

在△ACD 中，由正弦定理：

$$\frac{AD}{\sin a}=\frac{\alpha}{\sin[180^\circ-(a+\beta)]}$$

∴　$AD=\dfrac{\alpha\sin a}{\sin(a+\theta)}$

又在△BCD 中，由正弦定理：$\dfrac{BD}{\sin\beta}=\dfrac{\alpha}{\sin[180^\circ-(\beta+\gamma)]}$

∴　$BD=\dfrac{\alpha\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$

在△ADB中，由余弦定理：$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD\cos\angle ADB$

$$= \left(\frac{\alpha\sin a}{\sin(a+\theta)}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha\sin a}{\sin(a+\theta)}\right)\left(\frac{\alpha\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}\right)\cos(\gamma-\theta)$$

$$= \frac{\alpha^2\sin^2 a}{\sin^2(a+\theta)} + \frac{\alpha^2\sin^2\beta}{\sin^2(\beta+\gamma)} - \frac{2\alpha^2\sin a\sin\beta\cos(\gamma-\theta)}{\sin(a+\theta)\sin(\beta+\gamma)}$$

$$= \alpha^2\left(\frac{\sin^2 a}{\sin^2(a+\theta)} + \frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\beta+\gamma)} - \frac{2\sin a\sin\beta\cos(\gamma-\theta)}{\sin(a+\theta)\sin(\beta+\gamma)}\right)$$

6、证：第一法：

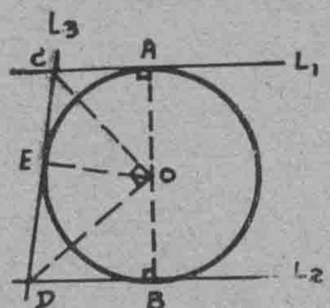

图103

如图，设直线L_3与元O相切于E点，连接OA、OC、OE、OD、OB，则

$\angle OAC = \angle OEC = \angle OED = \angle OBD = 90°$

∴　$\angle OAC + \angle OEC = 180°$

即　O、A、C、E四点共元（对角互补的四边形四顶点共元）。

∴　$\angle AOE + \angle ACE = 180°$（元内接四边形对角互补）

又　∵$L_1 /\!/ L_2$（已知）

∴　$\angle BDE + \angle ACE = 180°$　（平行线间同旁内角互补）

故　$\angle AOE = \angle BDE$

∵　$\angle AOC = \angle COE$，$\angle BDO = \angle ODE$（元外一点与元心的连线平分过这点两切线的夹角和过切点两半径的夹角）。

∴　$\angle AOC = \angle BDO$（等量的一半相等），

则直角三角形AOC～直角三角形BDO，故$\frac{AC}{OB} = \frac{OA}{BD}$

∴　$AC \cdot BD = OA \cdot OB$ = 半径²，即无论L_3在何种位置，因两平行线间的距离一定，所以半径²为常量。

∴　$AC \cdot BD$ = 常量。

第二法：如图，　∵　$L_1 /\!/ L_2$（已知），　∴　$\angle ACE + \angle EBD = 180°$

又　$\angle ACO = \angle ECO$，$\angle BDO = \angle EDO$，　∴　$\angle ECO + \angle EDO = 90°$

故在△COD中，$\angle COD = 90°$。又　$OE \perp CD$，　∴　$CE \cdot ED = OE^2$ = 半径²

（直角三角形斜边上的高，是两直角边在斜边上的投影的比例中项）

但$CE = AC$，$ED = BD$，（从元外一点向元引的两条切线长度相等）。

∴　$AC \cdot BD$ = 半径²，即无论L_3在何种位置，两平行线间的距离一定，半径²为常量，上式均成立，　∴　$AC \cdot BD$ = 常量。

7、解：　已知：如图，平面S内的△ABC中，$\angle ACB = 90°$，BC = 18分米，平面S外一点P到S面之距离PD = 40分米，$PE \perp AC$，且$PA = PB = PC$

求：$PE = ?$

解：∵　$PD \perp$ 平面S，且$PA = PB = PC$。故　PA，PB，PC在平面S之内的射影长度

相等（即 $AD=BD=CD$）。

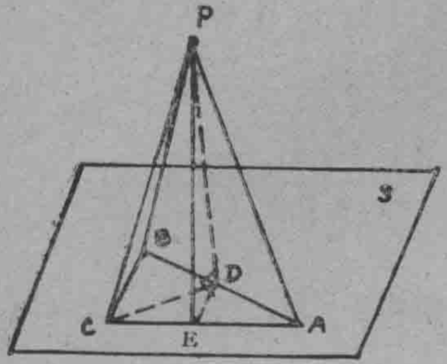

图104

因为直角三角形斜边上的中线等于斜边长度之半，即AB的中点与A、B、C三点等距离，故垂足D必在斜边AB的中点上。

∵ $PA=PC$，$PE\perp AC$（已知）

∴ $AE=EC$（等腰三角形底边上的高又是底边上的中线）

边接DE，则 $DE=\frac{1}{2}BC=9$ 分米，

（三角形中位线定理）。

又 ∵ $PD\perp$ 平面S（已知），∴ $PD\perp ED$

（垂直于平面之直线必垂直于平面内过垂足的任何直线）。

在直角三角形PDE中，由勾股定理：

$$PE=\sqrt{PD^2+DE^2}=\sqrt{40^2+9^2}=\sqrt{1600+81}=\sqrt{1681}=41\text{分米}$$