五、四川高等学校

1、化简 $2^{-\frac{1}{2}}+\cos 225^{\circ}+\operatorname{Lg} 5-\operatorname{Lg} \sin 30^{\circ}+8^{\frac{2}{3}}$

2、解不等式 $\frac{X+1}{X-1}>1$

3、证明　$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2 \operatorname{tg} 2 x$

4、若 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\beta$ 是方程 $x^{2}+Px+q=0$ 的根，用p，q来表示 $\operatorname{tg} 2(\alpha+\beta)$

5、等腰梯形的上底，腰、下底成等差数列，且底角为60°，梯形的面积为 $2\sqrt{2}$，求梯形的各

边。

6、解方程　　$9^x-10\cdot3^{x+1}+81=0$

7、同底同侧的两个三角形ABC和ABD，AC、BC、BD、AD的中点分别为M、N、P、Q，求证：（Ⅰ）MNPQ为一平行四边形，

（Ⅱ）▱MNPQ的面积等于两三角形面积差的一半。

8、某元锥形的人造卫星中，有一个内切球形仓，已知此球的体积为元锥体积的一半，求元锥母线与底面的夹角。

题　　解：

1、解：原式$=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\cos(180^\circ+45^\circ)+Lg5-Lg\frac{1}{2}+(2^3)^{\frac{2}{3}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos45^\circ+Lg5-Lg\frac{5}{10}+2^2=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+Lg5-(Lg5-Lg10)+4$$

$$=1+4=5$$

2、解：$\dfrac{(x-1)+2}{x-1}>1$，　　即　　$1+\dfrac{2}{x-1}>1$

$\therefore\quad \dfrac{2}{x-1}>0$　　则　　$x-1>0$，　　故　　$x>1$

3、证：　左边$=\dfrac{tgx+tg\frac{\pi}{4}}{1-tgx\cdot tg\frac{\pi}{4}}+\dfrac{tgx-tg\frac{\pi}{4}}{1+tgx\cdot tg\frac{\pi}{4}}=\dfrac{tgx+1}{1-tgx}+\dfrac{tgx-1}{1+tgx}$

$$=\frac{(tgx+1)^2-(tgx-1)^2}{(1-tgx)(1+tgx)}=\frac{[(tgx+1)+(tgx-1)][(tgx+1)-(tgx-1)]}{1-tg^2x}$$

$$=\frac{2tgx\cdot2}{1-tg^2x}=\frac{4tgx}{1-tg^2x}$$

右边$=2\cdot\dfrac{2tgx}{1-tg^2x}=\dfrac{4tgx}{1-tg^2x}$

$\therefore$　　左边＝右边

4、解：由根与系数的关系（韦达定理）知：$tga+tg\beta=-p$，$tgatg\beta=q$

$$\therefore\qquad tg2(a+\beta)=\frac{2tg(a+\beta)}{1-tg^2(a+\beta)}=\frac{2\left(\frac{tga+tg\beta}{1-tgatg\beta}\right)}{1-\left(\frac{tga+tg\beta}{1-tgatg\beta}\right)^2}$$

$$=\frac{2\left(\frac{-p}{1-q}\right)}{1-\left(\frac{-p}{1-q}\right)^2}=\frac{-\frac{2p}{1-q}}{1-\frac{p^2}{(1-q)^2}}$$

$$= \frac{-2p(1-q)}{(1-q)^2-p^2} = \frac{2p(1-q)}{p^2-(1-q)^2}$$

5、已知：在等腰梯形ABCD中，$AB \parallel CD$，$\angle A = \angle B = 60°$　上底$CD = \alpha - d$

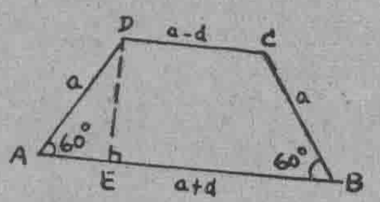

图112

下底$AB = \alpha + d$　腰　$AD = BC = \alpha$，面积 $s = 2\sqrt{2}$。

求：$CD = ?$　　$AD = BC = ?$　　$AB = ?$

解：过D点作$DE \perp AB$，垂足为E，

在直角三角形ADE中，

$$\sin A = \frac{DE}{AD}, \qquad \cos A = \frac{AE}{AD}$$

$$\therefore \quad DE = \alpha \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha, \qquad AE = \alpha \cos 60° = \frac{1}{2}\alpha$$

故梯形面积　$S = \frac{1}{2}(CD + AB) \cdot DE = \frac{1}{2}[(\alpha - d) + (\alpha + b)]\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\alpha \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^2$$

即　$\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^2 = 2\sqrt{2}$　　$\therefore$　$\alpha^2 = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\therefore$　$\alpha = \sqrt{4\sqrt{\frac{2}{3}}} = 2\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3}}} = 2\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$（只取正值）。

由对称关系（等腰梯形）：$AB - CD = 2AE$，即　$(\alpha + d) - (\alpha - d) = 2 \cdot \frac{1}{2}\alpha$，

$2d = \alpha$　　$\therefore$　$d = \frac{\alpha}{2}$

故　$CD = \alpha - d = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right) = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

$AB = \alpha + d = \alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}\alpha = \frac{3}{2}\left(2\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right) = 3\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

即　$CD = \frac{\sqrt[4]{54}}{3}$，　$AD = BC = \frac{2\sqrt[4]{54}}{3}$，　$AB = \sqrt[4]{54}$

6、解：$(3^2)^x - 10 \cdot 3^x \cdot 3 + 81 = 0$，即$3^{2x} - 30 \cdot 3^x + 81 = 0$，$(3^x - 3)(3^x - 27) = 0$

当　$3^x - 3 = 0$时，　$3^x = 3$，　$\therefore$　$x = 1$

又　$3^x - 27 = 0$时，　$3^x = 3^3$，　$\therefore$　$x = 3$

经验算得知　$x_1 = 1$，$x_2 = 3$都是原方程的根。

7、证：（I）　$\because$　M、N、P、Q分别为AC、BC、BD、AD的中点，

则　$MN \underline{\perp} \frac{1}{2}AB$

$PQ \underline{\perp} \frac{1}{2}AB$　　（三角形中位线定理）

$\therefore$　$MN \underline{\perp} PQ$　　故MNPQ为平行四边形

（Ⅱ）设△ABC底边AB上的高线长为h_1，△ABD底边AB上的高线为h_2、

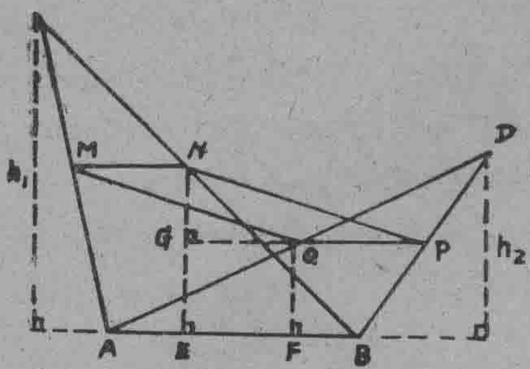

图113

过N作NE⊥AB，垂足为E；又过Q作QF⊥AB垂足为F，且NE交PQ的延长线于G，　则NG⊥PG，即NG是▱MNPQ中PQ边上的高，

∵　　N是BC边的中点，

∴　　$MN=\frac{1}{2}h_1$，同理Q是AD边的中点，

∴　　$QF=\frac{1}{2}h_2$

故　　$NG=NE-GE=NE-QF=\frac{1}{2}h_1-\frac{1}{2}h_2$

∴　　$S_{▱MNPQ}=PQ\cdot NG=\frac{1}{2}AB\cdot(\frac{1}{2}h_1-\frac{1}{2}h_2)=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}AB\cdot h_1-\frac{1}{2}AB\cdot h_2)$

$=\frac{1}{2}(\triangle ABC-\triangle ABD)$

8、　已知：如图所示为某元锥形人造卫星的一个轴截面，⊙o为等腰△ABC的内切元，CA＝CB，D为AB边上的切点，

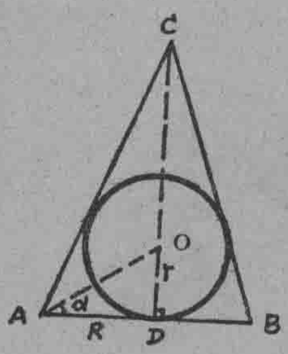

图114

$$V_{球形仓}=\frac{1}{2}V_{元锥}$$

求：∠A＝？

解：过C作CD⊥AB，垂足为D。

∵　　CA＝CB，　⊙o为等腰△ABC的内切元，则CD必通过元心o，且AD＝BD。

连接oA，$a=\frac{\angle A}{2}$（三角形元心与角的顶点的连线平分这个角）。

设元锥的底面半径AD＝R，内切球的半径OD＝r，在直角三角形AOD中，$\mathrm{tg}\,a=\frac{OD}{AD}$，　　∴　　$r=R\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}$

又在直角三角形ACD中，$\mathrm{tg}\,A=\frac{CD}{AD}$，　　∴　　元锥高　$h=CD=R\ \mathrm{tg}A$

由体积计算公式：　$V_{元锥}=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R\ \mathrm{tg}A=\frac{1}{3}\pi R^3\mathrm{tg}A$

$$V_{球形仓}=\frac{4}{3}\pi\gamma^3=\frac{4}{3}\pi\ (R\,\mathrm{tg}\frac{A}{2})^3=\frac{4}{3}\pi R^3\mathrm{tg}^3\frac{A}{2}$$

根据题意：　$\frac{4}{3}\pi R^3\mathrm{tg}^3\frac{A}{2}=\frac{1}{6}\pi R^3\mathrm{tg}A$，　　化简　　$8\,\mathrm{tg}^3\frac{A}{2}=\mathrm{tg}A$

$8\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}\cdot\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}=\mathrm{tg}A$，　∴　$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}$，$\mathrm{tg}\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{1-\cos A}{\sin A}$

代入上式得：$8\times\frac{\sin A}{1+\cos A}\times\frac{1-\cos A}{1+\cos A}=\frac{\sin A}{\cos A}$，即$\frac{8(1-\cos A)}{(1+\cos A)^2}=\frac{1}{\cos A}$

$8\cos A(1-\cos A)=(1+\cos A)^2$， $8\cos A-8\cos^2 A=1+2\cos A+\cos^2 A$

$9\cos^2 A-6\cos A+1=0$， $(3\cos A-1)^2=0$， $3\cos A-1=0$

$\therefore \quad \cos A=\frac{1}{3}$

故 $\quad A=\arccos\frac{1}{3}=70°32'$，即元锥母线与底面的夹角约$70°32'$。