一九五八年（广东省）

一、　　存在其他版本为(1+2x)的5次方,答案为80

1．求二项式$(3+2x)^5$展开式中x^3的系数．

解　x^3项系数为$C_5^3\cdot 3^2\cdot 2^3=\dfrac{5\times 4}{1\times 2}\cdot 3^2\cdot 2^3=720$．

2．求证 $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x=\dfrac{\sin 8x}{8\sin x}$，$\left(\begin{array}{l}x\neq k\pi\\ k\text{为任意整数}\end{array}\right)$

证明　$\because$　$x\neq k\pi$，（k为任意整数）

故右式恒有意义．

$$右边=\frac{\sin 8x}{8\sin x}$$

$$=\frac{2\sin 4x\cdot\cos 4x}{8\sin x}$$

$$=\frac{4\sin 2x\cos 2x\cdot\cos 4x}{8\sin x}$$

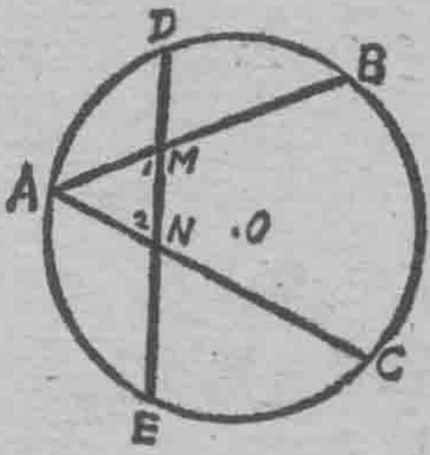
$$=\frac{8\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x}{8\sin x}$$

$$=\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x=左边．$$

3．AB、AC为$\odot O$的两弦，D为$\overset{\frown}{AB}$的中点，E为$\overset{\frown}{AC}$的中点，连D、E交AB于M，交AC于N．

求证：$AM=AN$

证 如图，$\angle 1$为$\frac{1}{2}(\widehat{AE}+\widehat{BD})$所度



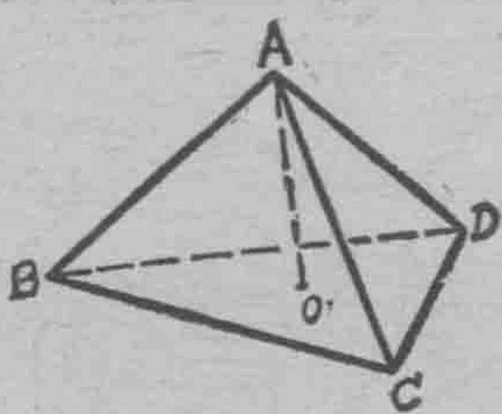
$\angle 2$为$\frac{1}{2}(\widehat{AD}+\widehat{EC})$所度

但 $\widehat{AE}=\widehat{EC}$，$\widehat{AD}=\widehat{BD}$

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$，$AM=AN$.

4．求证：正四面体相对的两棱互相垂直

证 正四面体$ABCD$(如图)



顶点A在底面内的射影是底面正三角形BCD的中心O.因此棱AD在底面内的射影为DO.

而$DO\perp BC$，

依三垂线定理$AD\perp BC$.

同理$AC\perp BD$、$AB\perp CD$.

5．解方程$\sin x=\sqrt{3}\cos x$.

解 以2除各项得$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0$

即 $\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}=0$

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \qquad x-\frac{\pi}{3}=n\pi \qquad n\text{为整数}$$

故 $x=n\pi+\frac{\pi}{3}$.

二、解方程组 $\begin{cases}\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+2y-1}=4\\ 2x+2y+\dfrac{1}{y}=9.\end{cases}$

解 设 $\sqrt{x+\frac{1}{y}}=X$， $\sqrt{x+2y-1}=Y$

并且X，Y非负数

则有 $\begin{cases}X+Y=4 & ①\\ \left(x+\dfrac{1}{y}\right)+(x+2y-1)=8 & ②\end{cases}$

②可写为$X^2+Y^2=8$ ③

①^2：$X^2+2XY+Y^2=16$ ④

2③－④，得 $(X-Y)^2=0$

∴ $X=Y$，代入①，得 $2X=4$，

∴ $X=Y=2$.

即 $\sqrt{x+\frac{1}{y}}=2$， $\sqrt{x+2y-1}=2$.

平方之：$x+\frac{1}{y}=4$ ⑤

$x+2y-1=4$ ⑥

⑥－⑤得　$2y-\frac{1}{y}-1=0$

即　$2y^2-y-1=0$

$(y-1)(2y+1)=0$

∴　$y_1=1$，　$y_2=-\frac{1}{2}$

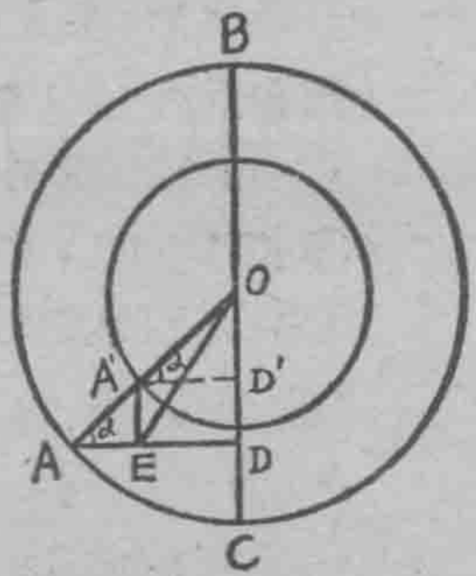
代入⑤：$x_1=3$，　$x_2=6$

经检验　$\begin{cases}x_1=3\\y_1=1\end{cases}$　$\begin{cases}x_2=6\\y_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$　是原方程组的解.

三、设有两个同心圆，半径各为R、r、$(R>r)$今由圆心O作半径交大圆于A，交小圆于A'，由A作直线AD垂直于大圆直径BC，并交BC于D，作$A'E\perp AD$，并交AD于E，

已知：$\angle OAD=\alpha$

求　OE的长



解　如右图．在直角$\triangle OAD$中

$OD=R\sin\alpha$，　$AD=R\cos\alpha$

在直角$\triangle A'AE$中，

$AE=(R-r)\cos\alpha$

$ED=AD-AE=R\cos\alpha-(R-r)\cos\alpha=r\cos\alpha$

（或作$A'D'\perp OD$，则有$ED=A'D'=r\cos\alpha$）

在直角$\triangle OED$中

$OE=\sqrt{OD^2+ED^2}$

$=\sqrt{R^2\sin^2\alpha+r^2\cos^2\alpha}$.

四、已知△ABC，求作圆过A及AB中点M，并与BC相切.

作法 ①延长AB至D，使$BD=\frac{AB}{2}=BM$.

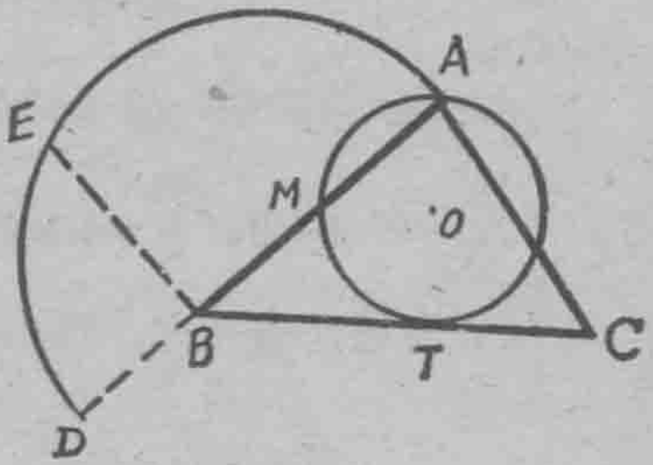
②作AB与BM的比例中项x.

③在BC上截取$BT=x$.

④过A、M、T作圆O即为所求.

证明 由圆幂定理.

设由圆外一点，作一切线与一割线，则此切线为割线及其圆外部分之比例中项，



今由作图，

$BT^2=BE^2$

$=DB\cdot BA=BM\cdot AB$.

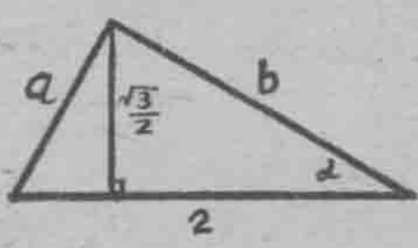
∴ T为所求作的圆的切点，

而此圆过A、M、T，即为所求.

五、已知一直角三角形的斜边长为2，斜边上的高为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

求证：此三角形的两个锐角是下列三角方程的根.

$$\sin^2x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{4}=0.$$



解 设$\angle A=x$.

则 $a=2\sin x$.

$$b=\frac{\sqrt{3}}{2\sin x}.$$

依勾股定理，$c^2=a^2+b^2$，故得

$$4\sin^2 x+\frac{3}{4\sin^2 x}=4 \qquad ①$$

左边配方，

$$\left(2\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2\sin x}\right)^2=4+2\sqrt{3}.$$

注意到x为锐角，故 $2\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin x}>0$，又右边

$$4+2\sqrt{3}=1+2\sqrt{3}+3=(1+\sqrt{3})^2$$

故将方程两边开方，得

$$2\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2\sin x}=1+\sqrt{3}$$

以$\dfrac{1}{2}\sin x$乘之并移项，得

$$\sin^2 x-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{4}=0 \qquad ②$$

若设$\angle B=x$，则由$c^2=a^2+b^2$亦得①

故两锐角均满足方程②.