一九五八年（河北省）

试卷上不必抄题，但须写明题号，例如一、1．一、2．二、三等．

一、（本题满分共30分）

1． 求多项式 $x^{376}-2x^{223}+5x^{145}-3x^{26}+3$．用$x+1$除所得的余数（本题满分4分）．

解 $f(-1)=(-1)^{376}-2(-1)^{223}+5(-1)^{145}-3(-1)^{26}+3$

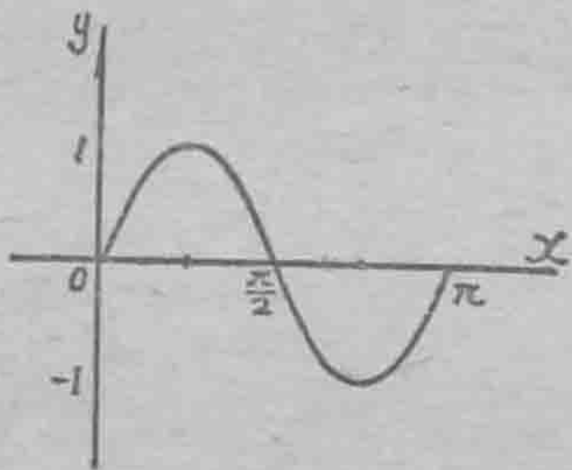
$$=1-2(-1)+5(-1)-3\cdot(1)+3$$

$$=1+2-5-3+3=-2.$$

2． 试求函数 $y=sin2x$ 的周期，并作出它在一个周期内的图象．（本题满分6分）

解 周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

$$=\frac{2\pi}{2}=\pi.$$



3． 求 $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt{x}\right)^7$的展开式中含$x$的一次幂的项． （本题满分8分）

解 由 $T_{k+1}=C_n^k a^k x^{n-k}$

依题意， $C_7^k(x^{\frac{1}{2}})^k(x^{-\frac{1}{3}})^{7-k}=x$．

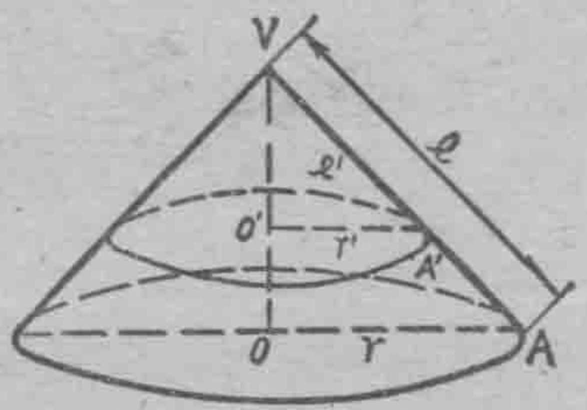
$\therefore\quad \frac{k}{2}-\frac{1}{3}(7-k)=1.$

$3k-2(7-k)=6.\qquad 5k=20\qquad \boldsymbol{k=4}.$

$\therefore\quad C_n^k=C_7^4=C_7^3=\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}=35$

故　含x的一次幂的项为$35x$.

4．设一圆锥的母线长为l，底面半径为r．用平行于底面的一个平面在这圆锥上截下一个小圆锥．若小圆锥的侧面积等于原来圆锥的侧面积的一半.试求小圆锥的母线的长.（本题满分12分）



解　$S_{\text{大圆锥侧}}=\frac{1}{2}\cdot2\pi r\cdot l=\pi rl.$

$S_{\text{小圆锥侧}}=\frac{\pi rl}{2}=\pi r'l'$

$\because\quad \triangle VO'A'\backsim\triangle VOA.$

$\therefore\quad \frac{r'}{r}=\frac{l'}{l}\quad\therefore\quad r'=\frac{rl'}{l}$代入上式

$$\frac{\pi r l}{2}=\pi\cdot\frac{r l'}{l}\cdot l' \qquad \therefore \quad l'^2=\frac{l^2}{2}.$$

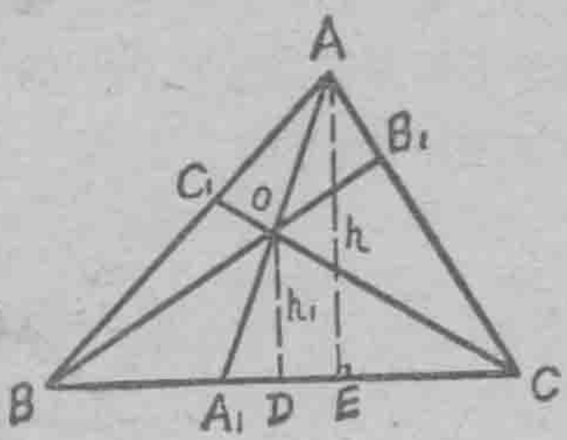
故 $l'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}l$.

二、（本题满分16分）

设 O为$\triangle ABC$内的一点，线段 AO 的延长线交 BC于A_1点，线段BO的延长线交AC于B_1点，线段CO 的延长线交AB于C_1点，求证：

① $\dfrac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\dfrac{OA_1}{AA_1}$;

② $\dfrac{OA_1}{AA_1}+\dfrac{OB_1}{BB_1}+\dfrac{OC_1}{CC_1}=1$.



证 ① 分别由O及A作BC的高h_1及h.

则 $$\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h_1}{\frac{1}{2}\ BC\cdot h}$$

$$=\frac{h_1}{h}=\frac{OA_1}{AA_1}\left(\because \quad \triangle DOA_1\backsim\triangle EAA_1,\quad \therefore \quad \frac{h_1}{h}=\frac{OA_1}{AA_1}\right)$$

② 同理可证 $$\frac{\triangle OCA}{\triangle ABC}=\frac{OB_1}{BB_1}$$

$$\frac{\triangle OAB}{\triangle ABC}=\frac{OC_1}{CC_1}$$

$$\therefore \quad \frac{OA_1}{AA_1}+\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}=$$

$$\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}+\frac{\triangle OCA}{\triangle ABC}+\frac{\triangle OAB}{\triangle ABC}=\frac{\triangle ABC}{\triangle ABC}=1.$$

三、（本题满分18分）

解方程组.

$$\begin{cases} \cos 2x+\cos 2y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} & ① \\ x+y=\arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) & ② \end{cases}$$

解　由②　$\cos(x+y)=\frac{1}{2}$.

∴　$x+y=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.　③（$n$为任意整数）

由①　并注意到　$\cos(x+y)=\frac{1}{2}$

∴　$2\cos(x+y)\cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$2\cdot\frac{1}{2}\cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

∴　$\cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴　$x-y=2m\pi\pm\frac{\pi}{6}$.　　④（$m$为任意整数）

解联立方程组③、④.

$$\begin{cases} x+y=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3} & ③ \\ x-y=2m\pi\pm\dfrac{\pi}{6} & ④ \end{cases} \quad n\text{不一定等于}m$$

$$\begin{cases} x_1=(n+m)\pi+\dfrac{\pi}{4}; \\ y_1=(n-m)\pi+\dfrac{\pi}{12}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=(n+m)\pi+\dfrac{\pi}{12}; \\ y_2=(n-m)\pi+\dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=(n+m)\pi-\dfrac{\pi}{12}; \\ y_3=(n-m)\pi-\dfrac{\pi}{6}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4=(n+m)\pi-\dfrac{\pi}{6}; \\ y_4=(n-m)\pi+\dfrac{\pi}{12}. \end{cases}$$

四、（本题满分18分）

一农场有甲、乙两台打麦机，甲机的工作效率是乙机的 2 倍．先只用甲机打完全部麦子的$\frac{2}{3}$，然后只用乙机继续打完，所需要的时间比同时用两台打麦机打完全部麦子所需要的时间多 4 天，问分别用一台打麦机打完所有的麦子各需要多少天？

解　设全部麦子为 1，乙机每天打麦的效率为 x．甲机每天打麦的效率为 $2x$．

依题意，列出方程．

$$\frac{\frac{2}{3}}{2x}+\frac{\frac{1}{3}}{x}-4=\frac{1}{2x+x}.$$

化简，得$\dfrac{1}{3x}=4$．　解得 $x=\dfrac{1}{12}$．

答：单用甲机打完全部麦子需要$\frac{1}{2x}=6$（天）.

单用乙机打完全部麦子需要$\frac{1}{x}=12$（天）.

五、（本题满分18分）

已知方程$4x^2-(4\cos\theta)x+1=0$有实根，求θ的一切可能的值.

解　如方程$4x^2-(4\cos\theta)x+1=0$有实根.

则　$\triangle=(-4\cos\theta)^2-4\cdot4\cdot1\geqslant0$.

化简，得　$\cos^2\theta\geqslant1$.

由余弦函数的性质，$|\cos\theta|\leqslant1$.

故　只能有　$\cos^2\theta=1$

$\cos\theta=\pm1$.

故　$\theta=k\pi$.　（k为任意整数）