六、湖北高等学校

1、设有数列$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$

1）、写出这个数列的第n项；

2）、写出这个数列的前n项和的公式；

3）、问这个和的公式当$x=1$时能否成立？如能成立，说明理由，如不能成立，怎样求和？

解：1）、这个数列的通项公式为$\alpha_n=nx^{n-1}$

2）、由求和公式

$$s_n=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

上述两边同乘x得：

$$x\cdot s_n=x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots\cdots+(n-2)x^{n-2}+(n-1)x^{n-1}+nx^n\cdots\cdots(2)$$

（1）－（2）　　$s_n-xs_n=(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{n-2}+x^{n-1})-nx^n$

上式右边括号中是一个等比数列，首项为1，公比为x，末项为x^{n-1}，由等比数列求和公式得：

$$(1-x)s_n=\frac{1-x(x^{n-1})}{1-x}-nx^n$$

$$\therefore\quad s_n=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$$

3）、当$x=1$时，以上求和公式中分母为o，公式无意义，由（2）式得：

$$S_n=1+2+3+4+\cdots\cdots+(n-2)+(n-1)+n$$

这是一个等差数列，首项为1，公差为1，末项为n，由等差数列求和公式得：

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

2、设A、B、C是△ABC的三个内角，求证，

$$tgA+tgB+tgC=tgA\cdot tgB\cdot tgC$$

证明：　$\because\quad A+B+C=\pi\quad\therefore\quad C=\pi-(A+B)$

故　$tgC=tg[\pi-(A+B)]$

$$=-\operatorname{tg}(A+B)=-\left(\frac{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B}\right)$$

即得 $\operatorname{tg}C(1-\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B)=-(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B)$

展开移项得 $\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\cdot\operatorname{tg}B\cdot\operatorname{tg}C$

3、解： $(\mathrm{Log}_x\sqrt{5})^2+\mathrm{Log}_x 5\sqrt{5}+\frac{5}{4}=0$

令 $\mathrm{Log}_x\sqrt{5}=y$

$\therefore$ $\mathrm{Log}_x 5\sqrt{5}=\mathrm{Log}_x(\sqrt{5})^3=3y$

于是原方程变为 $y^2+3y+\frac{5}{4}=0$

$$4y^2+12y+5=0$$

$$(2y+1)(2y+5)=0$$

$\therefore$ $y=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{5}{2}$

于是所求的解是 $\begin{cases}\mathrm{Log}_x\sqrt{5}=-\frac{1}{2}\\ \mathrm{Log}_x\sqrt{5}=-\frac{5}{2}\end{cases}$ 即 $X=\frac{1}{5}$, $X=\frac{1}{\sqrt[5]{5}}$

4、在△ABC中，AD是BC的中线，而且∠B和∠CAD互为余角，问△ABC是怎样的三角。

（1）几何解法：

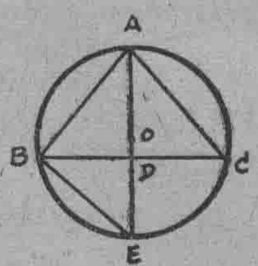

图115

延长AD交△ABC的外接元于E，连接BE，则

∠CAD＝∠CBE

但 ∠CAD＋∠ABC＝90°

$\therefore$ ∠CBE＋∠ABC＝90°

因而AE为元之直径，即元在中线AD上，

（一）若元心和中点D重合，则BC为元之直径，即元心为BO在中线上，此时三角形ABC是直角三角形。

（二）若元心D点不重合，则AD⊥BC，故AD为BC之中垂线，因此AB等于AC，这时△ABC是等腰三角形。

（2）三角解法：

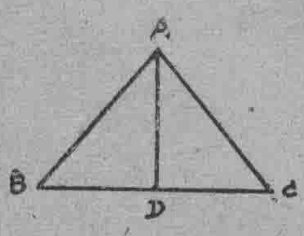

图116

设D为BC边的中点

则 BD＝DC

$\because$ ∠B＋∠CAD＝90°

$\therefore$ ∠C＋∠BAD＝90°

因而 $\sin\angle CAD=\cos B$ $\sin\angle BAD=\cos C$

在△ABC与△ACD中，依正弦定律分别有

$$\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin\angle BAD},\quad \frac{AD}{\sin C}=\frac{DC}{\sin\angle CAB}$$

由于　$BD=DC$

∴　$\sin B\cdot\sin\angle CAD=\sin C\cdot\sin\angle BAD$

即　$\sin B\cdot\cos B=\sin C\cos C$

∴　$\sin 2B=\sin 2C$

于是　$2\angle B=2\angle C$　或　$180^\circ-2\angle B=2\angle C$

即得　$\angle B=\angle C$　或　$\angle B+\angle C=90^\circ$

即　$\triangle ABC$为等腰三角形，或直角三角形。

4、在直角三角形所在平面外取一点P，而且P点和三角形三个顶点的距离都是相等的，证明，连接P点和三角形斜边中点的直线垂直于这个三角形所在的平面。

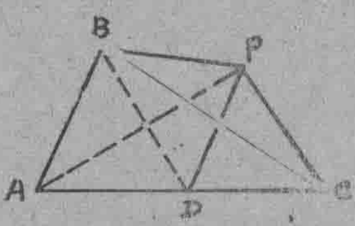

图117

证明：如左图$\triangle ABC$是直角三角形，$\angle B=90^\circ$ 现在过P点作一直线与三角形所在平面垂直，并与$\triangle ABC$所在的平面交于D点。

则由　$PA=PB=PC$

即有　$AD=BD=CD$（等长线段的射影相等）

又因直角三角形斜边上的中点到各顶点的距离相等，故D点即AC中点。

补充题：（非统考题）

1、比较　$(\frac{21}{20})^{100}$与 100的大小

解：∵　$Lg_{100}=2$，　$Lg(\frac{21}{20})^{100}=100(Lg21-Lg20)=100\times0.0212=2.12$

∴　$(\frac{21}{20})^{100}>100$

2、如$\alpha^2+b^2=7\alpha b$　求证　$Lg(\frac{\alpha+b}{3})=\frac{1}{2}(Lg\alpha+Lgb)$

证：　$\alpha^2+2\alpha b+b^2=9\alpha b$，即　$(\alpha+b)^2=9\alpha b$

即　$(\alpha+b)=3\sqrt{\alpha b}$　（∵　$\alpha>o$，$b>o$，　∴　取正号）

即　$\frac{\alpha+b}{3}=\sqrt{\alpha b}$

取对数　$Lg\frac{\alpha+b}{3}=\frac{1}{2}Lg(\alpha b)$，即$Lg(\frac{\alpha+b}{3})=\frac{1}{2}(Lg\alpha+Lgb)$

3、已知方程式$x^3+Px^2+qx+\gamma=0$的三根α、b、c成调合级数，求α、b、c，

解：　已知：$\alpha+b+c=-p$　（1）

$\alpha b+bc+c\alpha=q$　（2）

$$\alpha bc = -\gamma \tag{3}$$

又 $\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}$ (4)

从（4），（3）知　$b = \dfrac{2c\alpha}{\alpha + c} = \dfrac{q - c\alpha}{\alpha + c}$,　$\therefore$　$2c\alpha = q - c\alpha$

即　$q = 3c\alpha$　代入（3）$\dfrac{bq}{3} = -\gamma$，即 $b = \dfrac{-3\gamma}{q}$

$\alpha + c = -p - b = \dfrac{3\gamma - qp}{q}$，但由（4）　$c = \dfrac{q}{3\alpha}$ 代入

$3q\alpha^2 - 3(pq - 3\gamma) + q^2 = 0$　解得 α 代入　$c = \dfrac{q}{3a}$　即得 c