一、湖南高等学校

1、不用除法证明 $(2+x)^{2n-1}+x^{2n-1}+x+1$ 能被 $x+1$ 整除（n为正整数）。

2、不解方程 $6x^2-x-2=0$，求作一个二次方程，使它的根是原方程的根的倒数。

3、求证 $\mathrm{siu}75°=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

4、证明：设三角形的三个角成等差数列，最大角与最小角相差30°，则其三边之比顺次等于 $2\sqrt{2}$，$2\sqrt{3}$，$\sqrt{6}+\sqrt{2}$ 之比。

5、一矩形内接于园，它的面积是48平方厘米，园半径是5厘米，求矩形的两邻边。

6、设AD，BE是由园O的直径AB两端点所引的切线，DE是过园上任意一点F的切线，此切线与AD，BE相交于D及E，求证：$AB\cdot BE=OF^2$

7、正六棱锥底面的边长是4 cm，侧面与底面所成二面角等于45°，求这棱锥体的体积。

8、证明二面角的平分面内任意一点到这二面角的两个面的距离相等。

题　解：

1、证： $f(-1)=(2-1)^{2n-1}+(-1)^{2n-1}-1+1$

$$=1-1-1+1=0$$

根据多项式 $f(X)$ 能被 $(x-\alpha)$ 整除之重要条件 $f(\alpha)=0$，故原式能被 $(x+1)$ 整除。

2、解：设原方程之两个根为 x_1，x_2，由根与系数的关系得：

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{1}{6} \\ x_1\cdot x_2=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\dfrac{\frac{1}{6}}{-\frac{1}{3}}=-\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x_1}\cdot\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{x_1x_2}=\dfrac{1}{-\frac{1}{3}}=-3 \end{cases}$$

故所求方程为 $x^2+\frac{1}{2}x-3=0$ 或 $2x^2+x-6=0$

3、证： $\sin 75°=\sin(45°+30°)$

$$=\sin45°\cos30°+\cos45°\sin30°$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

4、证：由题知三角形的最大角与最小角相差30°，且三个角成等差数列。

设三角形的一个角为a，则另两个角必为（$a-15°$）与（$a+15°$）

∵ $a+(a-15°)+(a+15°)=180°$ ，∴ 得 $3a=180°$

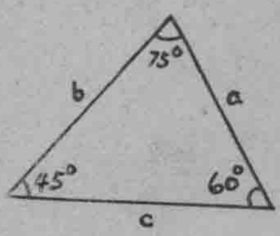

图 91

$$\therefore \begin{cases} a=60° \\ a-15°=45° \\ a+15°=75° \end{cases}$$

第3题已证得 $\sin 75°=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

由正弦定理 $\frac{\alpha}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

故 $\alpha:b:c:=\sin 45°:\sin 60°:\sin 75°$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$=2\sqrt{2}:2\sqrt{3}:(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

5、 解：如图，矩形ABCD内接于⊙o，连接AC，则AC＝10厘米为⊙o的直径。

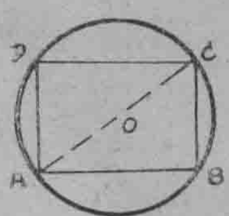

图 92

由题意知 $AB\cdot BC=48$ ………………………………………（1）

$AB^2+BC^2=AC^2=100$ ………………………………（2）

（2）+（1）× 2得 $AB^2+2AB,BC+BC^2=100+2\times 48$

即 $(AB+BC)^2=196$

∴ $AB+BC=14$ （只取正值）…………………（3）

联立（1）与（3）解之得 $AB=6$（或8）厘米

$BC=8$（或6）厘米

6、证：如图，连接OD，OE ∵AD，BE，DE均与⊙O相切

∴ $\angle OAD=\angle OFE=\angle OBE=90°$

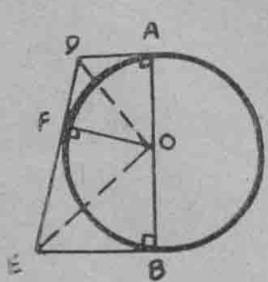

图 93

于是 $\angle OBE+\angle OFE=180°$

∴ B，O，F，E四点共园（对角互补的四边形四顶点共园）

故 $\angle AOF=\angle BEF$（园内接四边形外角等于内对角。）

又 $\angle BEO=\angle FEO$，$\angle AOD=\angle FOD$

∴ $\angle AOD=\angle BEO$

故直角三角形BOE∽直角三角形DAO

则 $\frac{BE}{AO}=\frac{BO}{AD}$， 又 $AO=BO=FO$

即 $AD\cdot BE=AO\cdot BO=OF^2$

7、解：

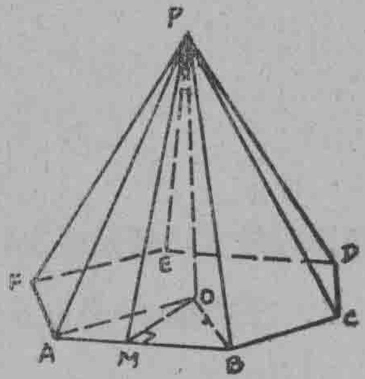

图 94

如图，正六棱锥P——ABCDEF的底面的边长 $AB = BC = CD = DE = EF = FA = 4$ cm，高 $PO \perp$ 底面ABCDEF，O为底面中心，在底面过O作 $OM \perp AB$ 交AB于M，连接OA，OB，PM，　则

$PM \perp AB$（三垂线定理）

显然　△AOB为等边三角形，即

$OA = OB = AB = 4$ cn，$AM = MB = 2$ cm

在直角三角形BOM中，$OM = \sqrt{OB^2 - MB^2}$

即　$OM = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm

∵　$PM \perp AB$，$OM \perp AB$

∴　侧面与底面所成二面角之平面角

$\angle PMO = 45°$

在直角三角形POM中，$\angle OPM = 90° - \angle PMO = 90° - 45° = 45° = \angle PMO$

∴　$PO = OM = 2\sqrt{3}$ cm

六棱锥的底面积　$S = 6\triangle AOB = 6 \times \frac{1}{2} AB \cdot OM = 3 \times 4 \times 2\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$ cm²

故　六棱锥的体积　$V = \frac{1}{3} S \cdot PO = \frac{1}{3} \times 24\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 48$cm³

8、已知：平面P平分由平面M和平面N组成二面角，A为平面P上任意一点。$AD \perp$ 平面M，$AE \perp$ 平面N

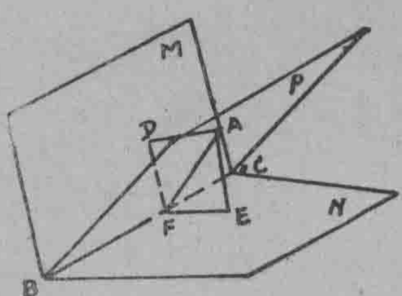

图 95

求证：$AD = AE$

证：在平面P内过A作 $AF \perp BC$ 交BC于F，连接DF和EF，则：

$DF \perp BC$，$EF \perp BC$（三垂线定理）

而∠DFE为二面角的平面角。

因平面P平分平面M和平面N组成的二面角，故在平面ADFE内，$\angle DFA = \angle EFA$（两个二面角相等，则它们的平面角也相等）

∵　$AD \perp$ 平面M，$AE \perp$ 平面N（已知）

∴　$AD \perp DF$，$AE \perp EF$（平面的垂线必垂直于平面上过垂足的任一直线）

故　$AD = DE$（角平分线上的任一点到两边的距离相等）。