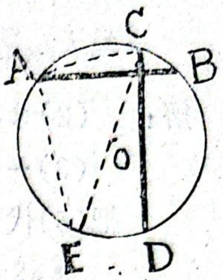
1958辽、吉、黑入学试题解答

1. 已知：园O内直交的二弦AB、CD相交于P，求证：

   $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$为一定值

   证明：连接AC，则由勾股定理知：



$$AC^2=PC^2+PA^2 \qquad (1)$$

$$BD^2=PB^2+PD^2 \qquad (2)$$

(1)+(2)得，$AC^2+BD^2=PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$

作直径CE，连AE、BD又在△AEC中及△PBD中

$\angle CAB=\angle CDB$. $\quad \angle CAB+\angle BAE=\angle CDB+\angle PBD=90°$

$\therefore \quad \angle BAE=\angle ABD$， 即 $\overset{\frown}{AED}=\overset{\frown}{EDB}$

而 $\overset{\frown}{AED}-\overset{\frown}{ED}=\overset{\frown}{BDE}-\overset{\frown}{ED}$， 即$\overset{\frown}{AmE}=\overset{\frown}{BnD}$，

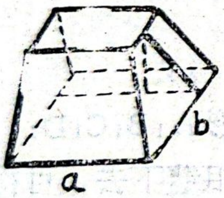
$\therefore \quad AE=BD$。 在rt△AEC中， $EC^2=AC^2+AE^2=AC^2+BD^2$

$\therefore \quad CE^2=PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$。其定值为园的直径的平方。

2. 工地上有沙堆，其下底面为矩形，长宽各为a米，b米，其各侧面都与地平面夹成45°角，上、下底距离为h米，求沙堆体积。

   解：如图所示，上底面的长，宽各为$(a-2h)$，$(b-2h)$，$S_1=ab$，

   $S_2=(a-2h)(b-2h)$



$$V=\frac{1}{3}h\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right).$$

$$=\frac{1}{3}h\left[ab+\sqrt{ab(a-2h)(b-2h)}+(a-2h)(b-2h)\right]$$

3. 求根式：$\sqrt[3]{a}$ 与 $\sqrt{5-a}$ 的乘积。

   解： $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{5-a}=\sqrt[6]{a^2}\cdot\sqrt[6]{(5-a)^3}=\sqrt[6]{a^2(5-a)^3}$

4. 解方程： $x^{1+lgx}=20^{\log_{20}100}$.

   解： $x^{1+lgx}=100$，两端取对数，$(1+lgx)lgx=2$.

   $lg^2x+lgx-2=0$. $\quad (lgx+2)(lgx-1)=0$.

   $\therefore \quad lgx=1$ ， $lgx=-2$.

$x_1=10$.　　$x_2=\frac{1}{100}$（对数定义）

检验后知：　10，$\frac{1}{100}$都是原方程的根。

5． 解方程组：
$$\begin{cases} 2x-5Z=10-6a & (1) \\ x-2y+3Z=2a+1 & (2) \\ 5x-6y+9Z=23-10a & (3) \end{cases}$$

若x为某直角三角形的斜边，y及z为直角边，试确定a的值。

解：　$(2)\times 3$　$3x-6y+9Z=6a+3$.　　(4)

$(3)-(4)$　$2x=23-10a-6a-3$，　$x=10-8a$　(5).

把(5)代入(1)　$2(10-8a)-5Z=10-6a$　$Z=2-2a$　(6)

把(5),(6)代入(2)，　$10-8a-2y+3(2-2a)=2a+1$，$y=\frac{15-16a}{2}$

$\because$　$x^2=y^2+Z^2$，　$\therefore$　$(10-8a)^2=\left(\frac{15-16a}{2}\right)^2+(2-2a)^2$

解方程　$16a^2+8\times 16a-159=0$，得　$a=\frac{-16\pm\sqrt{415}}{4}$。

6． 已知：　α、β 皆为锐角，求证：$\sin(\alpha+\beta)\leq\ \sin\alpha+\sin\beta$.

证明，　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\because$　α、β皆为锐角，$\therefore$　$\sin\alpha<1$，　$\sin\beta<1$。　$\cos\alpha<1$，　$\cos\beta<1$

$\because$　$\sin\alpha\cdot\cos\beta<\sin\alpha$，　$\cos\alpha\cdot\sin\beta<\sin\beta$

$\therefore$　$\sin(\alpha+\beta)\ <\sin\alpha+\sin\beta$.

7． 已知，正方形 ABCD 边长为a，连接相邻各边中点，得一正方形$A_1B_1C_1D_1$，再连结$A_1B_1C_1D_1$相邻各边中点又得一个正方形$A_2B_2C_2D_2$，如此相继下去，可得无数多个正方形。求这些正方形面积的总和。

解：　设：　n个正方形面积总和为S_n。

$$S_1=a^2\qquad S_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2a^2=\frac{a^2}{2},\ S_3=\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}$$

$$\therefore\ \frac{S_2}{S_1}=q=\frac{\frac{a^2}{2}}{a^2}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ S_n=\frac{a^2}{1-\frac{1}{2}}=2a^2$$

8. 解不等式， $2\cos^2 x-(2+\sqrt{3})\cos x+\sqrt{3}<0$

解： 原式可变为 $(\cos x-1)(2\cos x-\sqrt{3})<0$.

由 $\begin{cases}\cos x-1<0\\ 2\cos x-\sqrt{3}>0\end{cases}$，得 $\begin{cases}\cos x<1\\ \cos x>\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$， $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\cos x<1$。

由 $\begin{cases}\cos x-1>0\\ 2\cos x-\sqrt{3}<0\end{cases}$， 得 $\begin{cases}\cos x>1\\ \cos x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$， 矛盾，无解。

$\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， $x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore\ 2k\pi-\dfrac{\pi}{6}<x<2k\pi+\dfrac{\pi}{6}$，（k为整数）。且 $x\neq 2k\pi$