1959 年试题

试卷上不必抄题,但须写明题号,例如 Ⅰ(1)、 Ⅰ(2)、 Ⅱ、Ⅲ等.

一、(1)已知 lg2=0.3010,lg7=0.8451,求 lg35.

(注)lg 是以 10 为底的对数的符号.

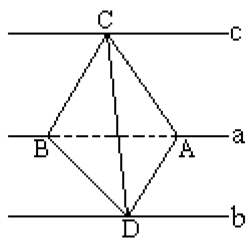
(2)化简 $\frac{(1-i)^3}{1+i}$.

(3)解不等式:$2x^2+5x<3$.

(4 求 cos165°的值.

(5)一直圆台上底的面积为 25π平方厘米,下底的直径为 20 厘米,母线长为 10 厘米.求这直圆台的侧面积.

(6)有三条不在同一平面内的平行线 a、b 和 c.在线 a 上取一固定线段 AB,在线 c、b 上各任取一点 C 和 D.求证:不论 C 和 D 取在 c、b 的什么位置上,四面体 ABCD 的体积总是不变的.

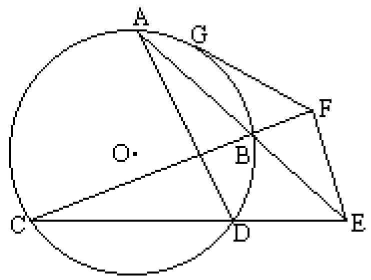


二、三个数成等差数列,前两个数的和的三倍等于第三个数的二倍;如果第二个数减去 2(仍当作第二项),三个数就成等比数列.求原来的三个数.

三、设有△ABC,已知∠B = 60°,AC边长为4,面积为$\sqrt{3}$.求AB及BC两边之长.

四、A、B、C 是直线 *L* 上三点,P 是这直线外一点.已知 AB=BC=a,∠APB=90°,∠BPC=45°.试求:(1)∠PBA 的正弦、余弦、正切;(2)线段 PB 的长;(3)P 点到直线 *L* 的距离.

五、延长圆 O 的两弦 AB、CD 交于圆外一点 E,过 E 点作 DA 的平行线交 CB 的延长线于点 F,自 F 点作圆 O 的切线 FG.求证 FG=FE.



1959 年试题答案

一、(1)$\lg 35=\lg\frac{10\times 7}{2}$

$=\lg 10+\lg 7-\lg 2$

$=1+0.8451-0.3010$

$=1.5441$.

(2)**解法一：**

$$\frac{(1-i)^3}{1+i}=\frac{(1-i)^4}{2}$$

$$=\frac{1-4i+6i^2-4i^3+i^4}{2}$$

$$=\frac{1-4i-6+4i+1}{2}=-2.$$

解法二：

$$\frac{(1-i)^3}{1+i}=\frac{1-3i+3i^2-i^3}{1+i}$$

$$=\frac{1-3i-3+i}{1+i}=\frac{-2-2i}{1+i}=-2$$

(3)解法一：

$2x^2+5x<3$,

移项,得

$2x^2+5x-3<0$,

$(2x-1)(x+3)<0$.

因为两个数的积是负数,必须并且只须这两个数中一个是正数,一个是负数,所以从这个不等式可以得出下面两个不等式组:

$$\begin{cases}2x-1>0,\\ x+3<0;\end{cases}\qquad \begin{cases}2x-1<0,\\ x+3>0.\end{cases}$$

第一个不等式组没有解,**第二个不等式组的解是**$-3<x<\frac{1}{2}$,

所以原不等式的解是$-3<x<\frac{1}{2}$.

解法二：

$2x^2+5x<3$,

移项,得

$2x^2+5x-3<0$,

不等式两边都乘以-1,得

$-2x^2-5x+3>0$

$\triangle=(-5)^2-4\cdot(-2)\cdot 3>0$,

二次三项式$-2x^2-5x+3$**的根是**-3**和**$\frac{1}{2}$.

当$-3<x<\frac{1}{2}$**的时候，**$-2x^2-5x+3$**和**-2**异号.**

因此，原不等式的解是 $-3<x<\frac{1}{2}$.

(4)解法一：

$$\begin{aligned}\cos165^\circ &= \cos(180^\circ-15^\circ)\\ &= -\cos15^\circ\\ &= -\cos(45^\circ-30^\circ)\\ &= -(\cos45^\circ\cos30^\circ+\sin45^\circ\sin30^\circ)\\ &= -(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2})\\ &= -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

解法二：

$$\begin{aligned}\cos165^\circ &= \cos(180^\circ-15^\circ)\\ &= -\cos15^\circ=-\cos\frac{30^\circ}{2}\\ &= -\sqrt{\frac{1+\cos30^\circ}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

(5)圆台侧面积 S=πL(R+r),其中 L 为母线,r、R 分别为上,下底的半径.

上底面积=πr^2=25π　　　　∴r=5(厘米)

下底半径 R=20/2(厘米)=10(厘米)

母线 l=10(厘米)

∴　这圆台侧面积

S=πL(R+r)

=π·10·(10+5)

=150π(厘米^2)

(6)△ABD 当四面体 ABCD 的底(如图)作底上的高 CO.

∵　a∥b

∴　无论 D 在 b 上什么位置,

△ABD 的面积总不变.

∵　a∥b∴a,b 决定一平面.

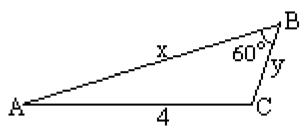
∵　c∥a,c∥b.

∴　c 平行于 a,b 所决定的平面.

∴　无论 C 点在 c 的什么位置,高 CO 的高度总不变.

四面体的体积等于 $\frac{1}{3}$×高×底面积,

因之,无论 C,D 在 c,b 上什么位置,其体积总不变.



二、设成等差数列的三个数是 x-y、x、x+y,依据题中条件,

列出方程组：$\begin{cases} 3[(x-y)+x]=2(x+y), & (1) \\ (x-2)^2=(x-y)(x+y). & (2) \end{cases}$

化简(1)和(2),得:

$$\begin{cases} 4x=5x, & (3) \\ y^2-4x+4=0. & (4) \end{cases}$$

将(3)代入(4),得:

$$y^2-5y+4=0,$$

$$(y-1)(y-4)=0$$

故 $y_1=1, y_2=4$

将y_1与y_2的值代入(3),得： $x_1=\frac{5}{4}$，$x_2=5$

故 $\begin{cases} x_1=\frac{5}{4}, \\ y_1=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=5, \\ y_2=4. \end{cases}$

又 $x_1-y_1=\frac{1}{4}, x_1+y_1=\frac{9}{4}$；$x_2-y_2=1, x_2+y_2=9$.

答：所求的三个数是$\frac{1}{4}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{9}{4}$或1，5，9.

三、设 AB 及 BC 两边之长为 x 及 y,则有

$$x^2+y^2-2xy\cos60°=4^2$$

$$\frac{1}{2}xy\sin60° = \sqrt{3}.$$

代入 cos60°及 sin60°的值,得到:

$$x^2+y^2-xy=16$$

$$xy=4$$

化简,得到: $x^2+y^2=20$ (1)

$2xy=8$ (2)

(1)+(2),得: $(x+y)^2=28,$ (3)

(1)-(2),得: $(x-y)^2=12$ (4)

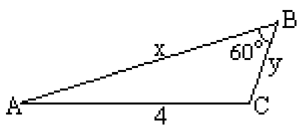
由(3)得 $x+y=2\sqrt{7},$ (5)

由(4)得 $x-y=\pm2\sqrt{3}.$ (6)

(5)+(6),得： $x=\sqrt{7}\pm\sqrt{3},$

(5)-(6),得： $y=\sqrt{7}\,\mu\,\sqrt{3},$

答：AB之长为$\sqrt{7}\pm\sqrt{3}$,BC之长为$\sqrt{7}\,\mu\,\sqrt{3}$.



四、解法一:令∠PBA=θ

$\overline{PB}=x$, P点到直线L的距离为h.

由△APB 知　　$x=a\cos\theta$，　　(1)

由△BPC知　$\dfrac{a}{\sin 45^\circ}=\dfrac{x}{\sin(\theta-45^\circ)}$　(2)

从(1)，(2)消去x，得：　$\dfrac{a}{\sin 45^\circ}=\dfrac{a\cos\theta}{\sin(\theta-45^\circ)}$，

$$\sqrt{2}\,(\sin\theta\cos 45^\circ-\cos\theta\sin 45^\circ)=\cos\theta,$$

$$\sin\theta-\cos\theta=\cos\theta$$

$$\sin\theta=2\cos\theta$$

故　$\operatorname{tg}\theta=2$

θ是锐角,所以　$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

于是　$x=a\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$，　$h=x\sin\theta=\dfrac{2}{5}a$.

答：(1) ∠PBA的正弦,余弦及正切分别是$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，2.

(2) PB的长是$\dfrac{a}{\sqrt{5}}$；

(3) P到 L的距离为$\dfrac{2}{5}a$.

解法二：由(2)得

$$x=\frac{a\sin(\theta-45^\circ)}{\sin 45^\circ}$$
$$=a\sqrt{2}(\sin\theta\cos 45^\circ-\cos\theta\sin 45^\circ)$$
$$=a\sin\theta-a\cos\theta. \qquad (3)$$

由(1),并因θ是锐角,得

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \qquad (4)$$

代(1),(4)入(3),得

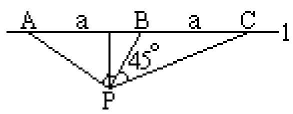
$$x=\sqrt{a^2-x^2}-x$$

由此得　$5x^2=a^2$,

$$x=\frac{a}{\sqrt{5}}$$

于是　$\cos\theta=\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

$\operatorname{tg}\theta=2$，$h=x\sin\theta=\dfrac{2}{5}a$.



五、证明:∵EF∥DA,

∴∠FEB=∠BAD，而∠BAD=∠BCD,

∴∠FEB=∠BCD，又∠EFB=∠EFC

∴△EFB∽△CFE

因此,FE:FC=FB:FE,

即 $FE^2=FB\cdot FC$.

∵FG 是圆 O 的切线,FBC 的圆 O 的割线,

∴$FG^2=FB\cdot FC$

∴$FG^2=FE^2$

即 FG=FE.