1961 年试题

试卷上不必抄题,但须写明题号,例如Ⅰ(1)、Ⅰ(2)、Ⅱ、Ⅲ等.

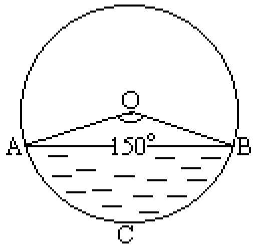
一、(1)求$(2-x)^{10}$展开式里x^7的系数.

(2)解方程:$2\lg x=\lg(x+12)$.(注:lg 是以 10 为底的对数的符号.)

(3)求函数$y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-5}$的自变量x的允许值的范围.

(4)求$\sin\dfrac{p}{12}\sin\dfrac{5p}{12}$的值.

(5)一个水平放着的圆柱形排水管,内半径是 12 厘米.排水管的圆截面上被水淹没部分的弧含有 150°(如图).求这个截面上有水部分的面积.(取π=3.14.)

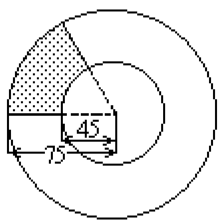


(6)已知△ABC 的一边 BC 在平面 N 内,△ABC 所在的平面与平面 N 组成二面角 a(a<90°).从 A 点作平面 N 的垂线 AA',A'是垂足.设△ABC 的面积是 S,求证△A'BC 的面积是 Scosa.

二、一个机器制造厂的三年生产计划,每年比上一年增产机器的台数相同.如果第三年比原计划多生产 1 千台,那末每年比上一年增长的百分数就相同,而且第三年生产的台数恰等于原计划三年生产总台数的一半,原计划每年各生产机器多少台?

三、有一块圆环形的铁皮,它的内半径是 45 厘米,外半径是 75 厘米.用它的五分之一(如图中的阴影部分),作圆台形水桶的侧面,这个水桶的容积是多少立方厘米?

四、在平地上有 A、B 两点.A 在山的正东.B 在山的东南,且在 A 的西 65°南 300 米的地方.在 A 测得山顶的仰角是 30°,求山高.(sin70°=0.940.精确到 10 米.)



五、下面甲、乙两题,选作一题.

甲、k 是什么实数的时候,方程$x^2-2(k+3)x+3k^2+1=0$有实数根?

乙、设方程$8x^2-(8\sin a)x+2+\cos 2a=0$的两个根相等,求 a.

1961 年试题答案

一、(1)解:在这个展开式里含有 x^7 的项是第八项.它的系数是

$$C_{10}^{7}(-1)^{7}\cdot 2^{3}$$
$$=-C_{10}^{3}\cdot 8$$
$$=-\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 8$$
$$=-960.$$

(2)解:$2\lg x=\lg(x+12)$,

$\lg x^2=\lg(x+12)$,

$\therefore x^2=x+12, x^2-x-12=0$,

$(x-4)(x+3)=0$,

$\therefore x_1=4, x_2=-3$.

当 $x=-3$ 时,$\lg x$ 没有意义,舍去;$x=4$ 为原方程的解.

(3)解:根据根式的定义,$x-1\geq 0$,$\therefore x\geq 1$;

又根据分母不能为零,$x-5\neq 0$,$\therefore x\neq 5$.

所以自变量 x 的允许值的范围是 $x\geq 1$,但 $x\neq 5$.

(4)解法一:$\sin\frac{p}{12}\sin\frac{5p}{12}$

$$=\sin\frac{p}{12}\cos\frac{p}{12}$$
$$=\frac{1}{2}\sin\frac{p}{6}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{4}.$$

解法二:$\sin\frac{p}{12}\sin\frac{5p}{12}$

$$=\frac{1}{2}(\cos\frac{p}{3}-\cos\frac{p}{2})$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-0)$$
$$=\frac{1}{4}.$$

解法三:$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$,

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{5\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$\therefore\quad \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{4}.$$

(5)解法一:

弧ACB的长是$12\times\frac{5p}{6}=10p$(厘米),

扇形$O-ACB$的面积$=\frac{1}{2}\times 12\times 10p$

$=60p$(平方厘米),

△OAB的面积$=\frac{1}{2}\times 12^2\times\sin 150°$

$=36$(平方厘米).

∴截面上有水部分的面积=60π-36

=60×3.14-36=152.4(平方厘米).

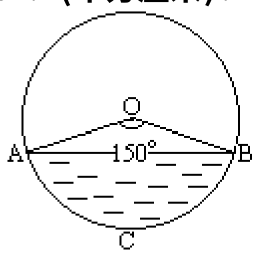
解法二:

扇形$O-ACB$的面积$=\frac{150}{360}\times p\times 12^2=60p$(平方厘米),

△OAB的面积$=\frac{1}{2}\times 12^2\times\sin 150°=36$(平方厘米).

∴ 截面上有水部分的面积=60π-36

=60×3.14-36=152.4(平方厘米).



(6)证明:

作 AD⊥BC于D,连 A'D,A'D是AD在平面N上的射影,

∴ A'D⊥BC.

∠ADA'是二面角 A-BC-A'的平面角,等于a.

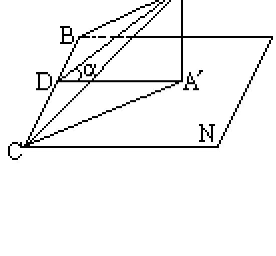
∵△AA'D是直角三角形,

∴ A'D=ADcosa.

∴△A'BC的面积$=\frac{1}{2}BC\cdot A'D$

$=\frac{1}{2}BC\cdot AD\cos\alpha$

$=S\cos\alpha$.



二、

解法一:

设原计划第一、二、三年生产机器的千台数分别为 x,x+y,x+2y.依题意,

得方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{(x+y)-x}{x}=\dfrac{(x+2y+1)-(x+y)}{x+y},\\ x+2y+1=\dfrac{1}{2}[x+(x+y)+(x+2y)].\end{cases}$$

这个方程组经过变形后,得方程组:

$$\begin{cases}y^2-x=0,\\ x-y-2=0.\end{cases}$$

解这个方程组,得

$$\begin{cases}x_1=4,\\ y_1=2;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=1,\\ y_2=-1.\end{cases}$$

由第一组解,得 x=4,x+y=6,x+2y=8.

第二组解不合题意,舍去.

答:原计划第一、二、三年各生产机器 4 千台、6 千台、8 千台.

解法二:

设原计划第一、二、三年生产机器的千台数为别为 x-y,x,x+y.依题意,得方程组:

$$\begin{cases}x^2=(x-y)(x+y+1),\\ x+y+1=\dfrac{1}{2}[(x-y)+x+(x+y)].\end{cases}$$

这个方程组经过变形后,得方程组:

$$\begin{cases}y^2+y-x=0,\\ x-2y-2=0.\end{cases}$$

解这个方程组,得

$$\begin{cases}x_1=6,\\ y_1=2;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=0,\\ y_2=-1.\end{cases}$$

由第一组解,得 x-y=4,x=6,x+y=8.

第二组解不合题意,舍去.

答:原计划第一、二、三年各生产机器 4 千台、6 千台、8 千台.

三、

解:

水桶上口的半径 $=\dfrac{1}{5}\times 75=15$(厘米),

水桶下底的半径 $=\dfrac{1}{5}\times 45=9$(厘米),

水桶的斜高 $=75-45=30$(厘米),

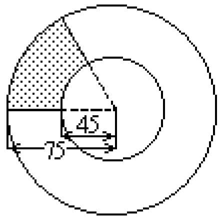
水桶的高 $=\sqrt{30^2-(15-9)^2}$

$=12\sqrt{6}$(厘米),

$\therefore$ 水桶的容积 $=\frac{1}{3}\cdot 12\sqrt{6}p(15^2+9^2+15\times 9)$

$=1764\sqrt{6}p$(立方厘米).

答:水桶的容积是$1764\sqrt{6}p$立方厘米.



四、

解:如图,CD 为山的高.

在△ABC 中,∠ACB=45°,∠CAB=65°,

∴∠ABC=180°-(45°+65°)=70°;

又 AB=300(米)

$$\therefore AC=\frac{AB\sin 70°}{\sin 45°}$$

$$=\frac{300\sin 70°}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=300\sqrt{2}\sin 70°\ (米).$$

在直角三角形 ACD 中,∠CAD=30°,

$$CD=ACtg30°$$

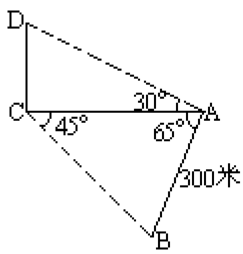
$$=300\sqrt{2}\sin 70°\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=100\sqrt{6}\ \sin 70°$$

=100×2.45×0.940

=230(米)

答:山高是 230 米



五、

甲、解法一:当这个方程的判别式Δ=0 或者Δ>0 的时候,原方程有实数根.

$(k+3)^2-(3k^2+1)$

$=-2k^2+6k+8.$

解 $-2k^2+6k+8=0$,

即 $k^2-3k-4=0$,

得 k=-1 或者 k=4.

解 $-2k^2+6k+8>0$,

即　$-k^2+3k+4>0$,

得　$-1<k<4$.

所以在$-1\leq k\leq 4$的时候,原方程有实数根.

解法二:

这个方程有实数根的条件是:

$$(k+3)^2-(3k^2+1)\geq 0$$

化简得:

$$-k^2+3k+4\geq 0,$$

$$k^2-3k-4\leq 0,$$

$$(k+1)(k-4)\leq 0,$$

$\therefore -1\leq k\leq 4$的时候,方程有实数根.

乙、解:因为方程的两个根相等,所以

$$(8\sin a)^2-4\cdot 8(2+\cos 2a)=0.$$

化简:

$$2\sin^2 a-(2+\cos 2a)=0,$$

$$2\sin^2 a-(3-2\sin^2 a)=0,$$

$$4\sin^2 a-3=0.$$

$\therefore \quad \sin\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

由 $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,得$\alpha = n\pi + (-1)^n\dfrac{\pi}{3}$;(n为整数)

由 $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,得$\alpha = n\pi - (-1)^n\dfrac{\pi}{3}$.(n为整数)

$\therefore \quad \alpha = n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$.(n为整数)