1962年试题

试卷上不必抄题,但须写明题号,例如1,5(1)等

1.某工厂第三年的产量比第一年的产量增长21%.问平均每年比上一年增长百分之几?又第一年的产量是第三年的产量的百分之几?(精确到1%)

2.求$(1-2i)^5$的实部.

3.解方程:$\log(x-5)+\log(x+3)-2\log 2=\log(2x-9)$.

4.求 $\sin(2\arcsin\frac{4}{5})$的值.

5.求证:(1)圆内接平行四边形是矩形;

(2)圆外切平行四边形是菱形.

6.解方程组:

$$\begin{cases} y^2-4x-2y+1=0, \\ y=x+a. \end{cases}$$

并讨论:a取哪些实数值时,这个方程组

(1) 有不同的两组实数解;

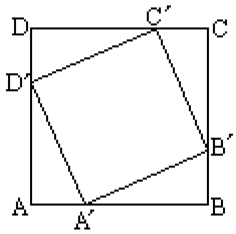
(2) 有相同的两组实数解;

(3) 没有实数解.

7.如图,ABCD和A′B′C′D′都是正方形,而A′、B′、C′、D′顺次分AB、BC、CD、DA成m:n,并设AB=1.

(1) 求正方形A′B′C′D′的面积;

(2) 证明:正方形A′B′C′D′的面积不小于$\frac{1}{2}$.



8.D是△ABC内的一点,已知

AB=AC=1, ∠CAB=63°,

∠DAB=33°, ∠DBA=27°,

求CD.(sin27°=0.4540.最后结果计算到小数点后两位.)

9.由正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的顶点A作这个正方体的对角线A_1C的垂线,垂足为E.证明:

$$A_1E:EC=1:2.$$

(要求画图)

10.求证:两两相交而不通过同一点的四条直线必在同一平面内.

1962年试题答案

1.解(1)设每年平均增长x%,则

$$(1+\frac{x}{100})^2=\frac{121}{100},$$

故 $1+\frac{x}{100}=\frac{11}{10},$

∴ $x=10$.

答:每年平均增长 10%.

(2) $1\div\frac{121}{100}=\frac{100}{121}\approx 0.83.$

答:第一年产量是第三年的 83%.

2.解∵$(1-2i)^5=1-C_5^1 2i+C_5^2(2i)^2-C_5^3(2i)^3+C_5^4(2i)^4-(2i)^5,$

∴$(1-2i)^5$ 的实部是

$1+10(2i)^2+5(2i)^4=1-40+80=41.$

3.解原方程可以写成

$$\log\frac{(x-5)(x+3)}{4}=\log(2x-9),$$

或者 $(x-5)(x+3)=4(2x-9)$.

化简,得 $x^2-10x+21=0,$

或 $(x-3)(x-7)=0$.

∴ $x_1=3,x_2=7$.

当 $x=3$ 时,$x-5<0$,而 $\log(x-5)$ 无意义,所以 3 不是原方程的解,经检验,$x=7$ 是原方程的解.

4.解设 $\arcsin\frac{4}{5}=a(0<a<\frac{p}{2}),$

则 $\sin a=\frac{4}{5},$

$$\cos a=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}.$$

∴$\sin(2\arcsin\frac{4}{5})=\sin 2a$

$=2\sin a\cos a$

$=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}.$

5.证明(1)设 ABCD 为圆内接平行四边形,因为平行四边形的对角相等,所以

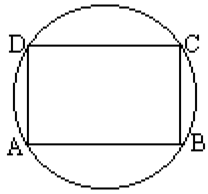
$\angle A=\angle C$.

又因圆内接四边形的对角互补,得

$\angle A+\angle C=180°$,

∴ $\angle A=\angle C=90°$,

∴ ABCD 是矩形.



(2)设平行四边形 ABCD 切圆于 E、F、G、H(如图),则因从圆外一点所作的两条切线等长,得

$$\begin{cases} AE = AH, \\ BE = BF, \\ CG = CF, \\ DG = DH. \end{cases}$$

四式相加,得

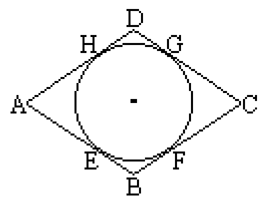
AB+CD=AD+BC.

又因平行四边形的对边相等,得

AB=CD, AD=BC.

∴ AB=BC

∴ ABCD 是菱形.



6.解:

$$\begin{cases} y^2 - 4x - 2y + 1 = 0, & (1) \\ y = x + a. & (2) \end{cases}$$

由(2), x=y-a, (3)

代入(1),得

$y^2-4(y-a)-2y+1=0$,

即

$y^2-6y+4a+1=0$.

∴ $y = 3 \pm \sqrt{9-(4a+1)}$

$= 3 \pm 2\sqrt{2-a}$

代入(3),得

$x = 3 - a \pm 2\sqrt{2-a}$

方程组的解为:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - a + 2\sqrt{2-a}, \\ y_1 = 3 + 2\sqrt{2-a}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 3 - a - 2\sqrt{2-a}, \\ y_2 = 3 - 2\sqrt{2-a}. \end{cases}$$

讨论:

(1)当 a<2 时,方程组有不同的两组实数解;

(2)当 a=2 时,方程组有相同的两组实数解;

(3)当 a>2 时,方程组没有实数解.

7.解:(1)由于 AB=1,AA′:A′B=m:n,得知

$$AA'=\frac{m}{m+n},\qquad A'B=\frac{n}{m+n}.$$

又知 BA′B′为直角三角形，

$$\therefore A'B'=\sqrt{A'B^2+B'B^2}=\sqrt{A'B^2+A'A^2}$$

$$=\sqrt{\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}}$$

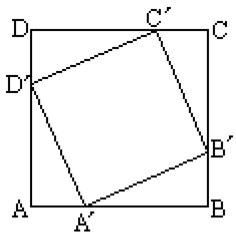
故正方形 A′B′C′D′的面积为

$$A'B'^2=\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}.$$

(2)证明 $\frac{m^2+n^2}{(m+n)^n}\geq\frac{1}{2}.$

$$\because \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}-\frac{1}{2}=\frac{2(m^2+n^2)-(m+n)^2}{2(m+n)^2}=\frac{(m-n)^2}{2(m+n)^2}\geq 0,$$

$$\therefore \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}\geq\frac{1}{2}.$$



8.解:在△ABD 内,

$$\angle BDA=180°-33°-27°=120°,$$

故根据正弦定理,

$$\frac{AD}{\sin 27°}=\frac{1}{\sin 120°},$$

$$AD=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 27°.$$

又 ∠DAC=63°-33°=30°,

故根据余弦定理,在△ADC 内,

$CD^2=1+AD^2-2AD\cos 30°$

$$=1+\frac{4}{3}\sin^2 27°-2\sin 27°$$

$$=1+2\sin 27°(\frac{2}{3}\sin 27°-1)$$

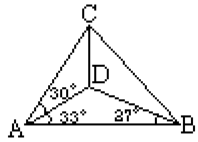
=1+0.9080×(0.3027-1)

=1-0.9080×0.6973

=1-0.6331

=0.3669.

∴ CD=0.60.



9.证明;

作 AC,则 $A_1A \perp AC$.

故$\triangle A_1AC$ 为直角三角形.

设正方体的棱长为 1,则

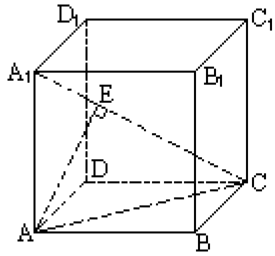
$AC=\sqrt{2}.$

在直角三角形 A_1AC 中,$AE \perp A_1C$,

$\therefore A_1A^2=A_1E \cdot A_1C$,　　即 $1=AE \cdot A_1C$.

同理,$AC^2=EC \cdot A_1C$,　即 $2=EC \cdot A_1C$.

由此得　　$A_1E:EC=1:2$.



10.证明:在这四条直线中,任取两条直线 a、b,设其交点为 P.因为四条直线不通过同一点,所以在另外两条直线中,至少有一条直线 c 不通过 P,直线 c 必与 a、b 分别交于不同的两点.因此,c 必在 a、b 所决定的平面内.

第四条直线 d 与 a、b、c 至少交于两个不同的点,所以 d 也在 a、b 所决定的平面内.

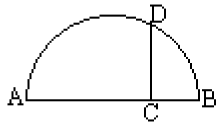
1963 年试题

1. 已知$\mathrm{tg}\,\theta=\sqrt{2}$,求$\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$的值.

2.(1) 求出复数$1+\sqrt{3}\mathrm{i}$的模数和辐角.

(2) 在直角坐标系XOY所在的平面内,以A点表示复数$1+\sqrt{3}\mathrm{i}$,把 OA 绕着 O 点按反时针方向旋转 150°,设 A 点到达的位置为 B,写出 B 点所表示的复数的代数式.

3.如图,AB 为半圆的直径,CD⊥AB.已知 AB=1,AC:CB=4:1,求 CD.



4.从二面角内任意一点向二面角的两个面作垂线,求证这两条垂线所决定的平面垂直于二面角的棱.(要求画图)

5.利用下列常用对数表,计算 $23.28^{-1.1}$

对数表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15

反对数表

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7

6.解方程:sin3x-sinx+cos2x=0.

7.用 1,2,3,4,7,9 组成没有重复数字的五位数,问;

(1)这样的五位数一共有多少个?

(2)在这些五位数中,有多少个是偶数?

(3)在这些五位数中,有多少个是 3 的倍数?

8. 解方程组:$\begin{cases} x^2-2xy-y^2=1, \\ \sqrt{xy+3}=x \end{cases}$

(限定在实数范围内)

9.如图,线段 CD 与⊙O 相交于 A、B 两点,且 AC=BD,

又 CE、DF 分别与⊙O 相切于 E、F.

求证:△OEC≌△OFD.