

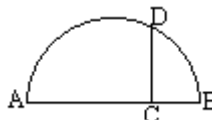
1963 年试题

1. 已知 $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$, 求 $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ 的值.

2.(1) 求出复数 $1 + \sqrt{3}i$ 的模数和辐角.

(2) 在直角坐标系 XOY 所在的平面内, 以 A 点表示复数 $1 + \sqrt{3}i$, 把 OA 绕着 O 点按反时针方向旋转 150° , 设 A 点到达的位置为 B , 写出 B 点所表示的复数的代数式.

3. 如图, AB 为半圆的直径, $CD \perp AB$. 已知 $AB=1$, $AC:CB=4:1$, 求 CD .



4. 从二面角内任意一点向二面角的两个面作垂线, 求证这两条垂线所决定的平面垂直于二面角的棱. (要求画图)

5. 利用下列常用对数表, 计算 $23.28^{-1.1}$

对数表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15

反对数表

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7

6. 解方程: $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 0$.

7. 用 $1, 2, 3, 4, 7, 9$ 组成没有重复数字的五位数, 问;

(1) 这样的五位数一共有多少个?

(2) 在这些五位数中, 有多少个是偶数?

(3) 在这些五位数中, 有多少个是 3 的倍数?

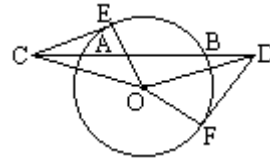
8. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 1, \\ \sqrt{xy + 3} = x \end{cases}$$

(限定在实数范围内)

9. 如图, 线段 CD 与 $\odot O$ 相交于 A, B 两点, 且 $AC=BD$,

又 CE, DF 分别与 $\odot O$ 相切于 E, F .

求证: $\triangle OEC \cong \triangle OFD$.



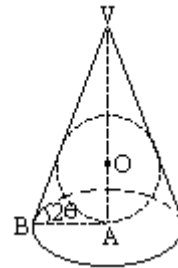
10. 如图, 半径为 1 的球, 内切于圆锥(即直圆锥), 已知圆锥的母线与底面的夹角是 2θ .

(1) 求证圆锥的母线与底面半径的和是 $\frac{2}{\operatorname{tg}^2 (1 - \operatorname{tg}^2 \theta)}$;

(2) 求证圆锥的全面积是 $\frac{2}{\operatorname{tg}^2 (1 - \operatorname{tg}^2 \theta)}$;

(3) 当 θ 是什么值的时候, 圆锥的全面积最小?(用反三角函数表示)

(图中 V 是圆锥的顶点, VB 是母线, O 是球心, A 是球和圆锥底面的切点.)



1963 年试题答案

1. 解法一: $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{2}$, $\cos \theta = \frac{1}{3}$.

以 $\cos \theta$ 除分式的分子和分母, 得

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} &= \frac{1 + \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg} \theta} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{1 - \sqrt{2}} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2}{-1} = -3 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

解法二: $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{2}$, θ 在第 一 象限或第 三 象限.

$$\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \cos \theta = \pm \frac{1}{3}.$$

当 θ 在第 一 象限时, $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\cos \theta = \frac{1}{3}$,

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} &= \frac{\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \\ &= -3 - 2\sqrt{2}; \end{aligned}$$

当 在第 象限时, $\sin = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\cos = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\frac{\cos + \sin}{\cos - \sin} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}} - (-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

$$= -3 - 2\sqrt{2}.$$

2. 解:

(1) $1 + \sqrt{3}i$ 的模数 $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$;

$1 + \sqrt{3}i$ 的辐角 的主值是 60°

辐角是 $k \cdot 360^\circ + 60^\circ$.

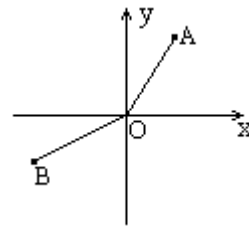
(其中 k 为任何整数)

(2) B 点所表示的复数的模数是 2, 而辐角的主值是 $60^\circ + 150^\circ = 210^\circ$,

B 点所表示的复数是:

$$2(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$$

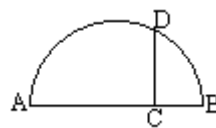
$$= -\sqrt{3} - i.$$



3. 解: $AB=1, AC:CB=4:1$,

$$AC = \frac{4}{5}, \quad CB = \frac{1}{5}.$$

$$CD = \sqrt{\frac{4}{5} \times \frac{1}{5}} = \frac{2}{5}.$$



4. 证法一:

已知: 二面角 $M-AB-N$, P 是 $M-AB-N$ 内任意一点, PC 垂直平面 M 于 C , PD 垂直平面 N 于 D .

求证: 平面 $PCD \perp AB$.

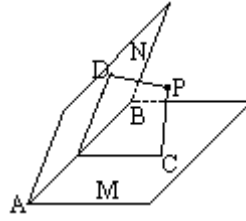
证明: $PC \perp$ 平面 M ,

PC 和 AB 垂直,

$PD \perp$ 平面 N ,

PD 和 AB 垂直.

平面 $PCD \perp AB$.



证法二：

已知：同证法一。

求证：同证法一。

证明：PC ⊥ 平面 M，

过 PC 的平面 PCD ⊥ 平面 M。

PD ⊥ 平面 N，

过 PD 的平面 PCD ⊥ 平面 N。

平面 PCD 垂直平面 M 和 N 的交线。

而 AB 即是平面 M 和 N 的交线，

平面 PCD ⊥ AB。

对数表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15

反对数表

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7

5. 解：lg23.28^{-1.1} = -1.1 × lg23.28

= -1.1 × 1.3670

= -1.5037

= $\bar{2}.4963$.

23.28^{-1.1} = 0.03135.

6. 解法一：

sin3x - sinx + cos2x = 0,

2cos2xsinx + cos2x = 0,

cos2x(2sinx + 1) = 0

由 cos2x = 0, 得 2x = 2n ± $\frac{\pi}{2}$,

x = nπ ± $\frac{\pi}{4}$.

(n 是整数)

由 $2\sin x + 1 = 0$, 得 $\sin x = -\frac{1}{2}$,

$$x = 2n\pi - \frac{\pi}{6};$$

$$x = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{6}.$$

(n 是整数)

$$x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}, x = 2n\pi - \frac{\pi}{6}, x = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{6}. (n \text{ 是整数})$$

解法二:

$$\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 0,$$

$$(3\sin x - 4\sin^3 x) - \sin x + (1 - 2\sin^2 x) = 0,$$

$$\text{整理, 得 } 4\sin^3 x + 2\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0.$$

$$\text{分解, 得 } (2\sin x + 1)(2\sin^2 x - 1) = 0.$$

由 $2\sin x + 1 = 0$, 得 $\sin x = -\frac{1}{2}$,

$$x = 2n\pi - \frac{\pi}{6};$$

$$x = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{6}.$$

(n 是整数)

由 $2\sin^2 x - 1 = 0$, 得 $\sin x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x = 2n\pi + \frac{\pi}{4}, x = (2n+1)\pi - \frac{\pi}{4};$$

$$x = 2n\pi - \frac{\pi}{4}, x = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{4}.$$

(n 是整数)

$$x = 2n\pi - \frac{\pi}{6}, x = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{6}, x = n\pi \pm \frac{\pi}{4}. (n \text{ 是整数})$$

7. 解:

(1) 从这六个数字中, 取出五个数字, 共能排成

$$A_6^5 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$$

个五位数.

(2) 在所求的偶数中, 末位必须取 2, 4 这两个数字中的一个, 这有两种方法, 取定末位后, 再从其余五个数字中任取四个, 排成其他四位, 这有

$$A_5^4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

种方法. 因此, 共有

$$2A_5^4 = 2 \times 120 = 240$$

个五位数是偶数.

(3) 一个整数是不是 3 的倍数, 要看它的各位数字之和是不是 3 的倍数, 这六个数字 1, 2, 3, 4, 7, 9 之和是 26, 因此只有除去 2, 余下的五个数字之和才是 3 的倍数. 由此可知, 所取的五个数字必须是 1, 3, 4, 7, 9. 因此, 共

有

$$P_5=5!=120$$

个五位数是3的倍数.

8. 解法一:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 1, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{xy+3} = x. & (2) \end{cases}$$

(2)的两边平方,得

$$xy+3=x^2,$$

即 $x^2 - xy = 3.$ (3)

将(1)的两边乘以3,得

$$3x^2 - 6xy - 3y^2 = 3. \quad (4)$$

从(4)的两边分别减去(3)的两边,得

$$2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0.$$

分解,得

$$(2x+y)(x-3y)=0,$$

$$2x+y=0, x-3y=0.$$

由此得 $\begin{cases} x^2 - xy = 3 \\ 2x + y = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - xy = 3, \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 2; \end{cases}$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ y_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ y_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

检验后, x_1, y_1 与 x_3, y_3 是原方程组的两组解; x_2, y_2 与 x_4, y_4 不适合方程(2).

方程组的解是:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

解法二:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 1, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{xy+3} = x. & (2) \end{cases}$$

(2)的两边平方,得

$$xy+3=x^2,$$

$$y = \frac{x^2 - 3}{x}. \quad (3)$$

代入(1),得

$$x^2 - 2x \frac{(x^2 - 3)}{x} - \left(\frac{x^2 - 3}{x}\right)^2 = 1.$$

整理,得

$$2x^4 - 11x^2 + 9 = 0.$$

分解,得

$$(x^2 - 1)(2x^2 - 9) = 0.$$

$$x^2 - 1 = 0, \quad x_1 = 1, x_2 = -1;$$

$$2x^2 - 9 = 0, \quad x_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad x_4 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

将 x 的值代入(3),得

$$y_1 = -2, y_2 = 2, y_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

检验后, x_1, y_1 与 x_3, y_3 是原方程组的两组解

; x_2, y_2 与 x_4, y_4 不适合方程(2).

方程组的解是:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

9. 证法一:

连结 OA, OB .

$$OA = OB, \quad \angle OAB = \angle OBA;$$

$$\angle OAC = \angle OBD.$$

又 $AC = BD, \quad \angle OAC = \angle OBD, \quad OC = OD.$

CE, DF 分别切 O 于 $E, F, \quad \angle OEC, \angle OFD$ 都是直角.

在 $\triangle OEC$ 与 $\triangle OFD$ 中:

$$\angle OEC = \angle OFD = 90^\circ, \quad OE = OF, \quad OC = OD,$$

$$\triangle OEC \cong \triangle OFD.$$

证法二:

CE, CB 分别是 O 的切线与割线,

$$CE^2 = CA \cdot CB = CA(CA + AB).$$

同理, $DF^2 = DB \cdot DA = DB(DB + AB).$

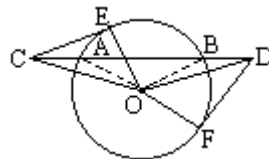
$$CA = DB, \quad CE^2 = DF^2, \quad CE = DF$$

CE, DF 分别切 O 于 $E, F, \quad \angle OEC, \angle OFD$ 都是直角.

在 $\triangle OEC$ 与 $\triangle OFD$ 中:

$$\angle OEC = \angle OFD = 90^\circ, \quad OE = OF, \quad CE = DF,$$

$$\triangle OEC \cong \triangle OFD.$$



10. 解: (1) 设 C 为母线 VB 与球相切的切点.

连 OA, OB, OC , 则 $OA = OC = 1, OB = OB,$

$$\angle OAB = \angle OCB = 90^\circ,$$

故 $\triangle OAB \cong \triangle OCB$.

由此可知,

$$\angle OBA = \angle OBC = \theta.$$

设圆锥的底面半径为 r , 母线为 l , 则

$$r = l \cos \theta, l = \frac{r}{\cos \theta} = \frac{r}{\cos 2\theta}$$

于是

$$\begin{aligned} 1 + r &= l \cos \theta \left(\frac{1}{\cos 2\theta} + 1 \right) = \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{2 \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{2}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2}{\cos \theta (1 - \tan^2 \theta)}. \end{aligned}$$

(2) 设圆锥的全面积为 T , 则

$$T = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r) = \pi r \cos \theta \frac{2}{\cos \theta (1 - \tan^2 \theta)} = \frac{2\pi}{\cos^2 \theta (1 - \tan^2 \theta)}$$

(3) 欲使 T 最小, 只要使 $\cos^2 \theta (1 - \tan^2 \theta)$ 最大即可.

由于

$$\cos^2 \theta (1 - \tan^2 \theta) = \cos^4 \theta + \sin^2 \theta = -\left(\cos^2 \theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4},$$

因此当 $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$ 时, $\cos^2 \theta (1 - \tan^2 \theta)$ 最大.

当 $\theta = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, T 最小.

