1964 年试题

1.化简:$\dfrac{\sqrt[3]{3^{-\frac{3}{2}}(\frac{1}{3})^{-3}}}{(\sqrt{3}-1)^2}$.

2.甲乙二人在河的南岸 O 处,隔河在正北方向有一建筑物 P.甲向正东、乙向正西沿河岸而行,甲每分钟比乙多走 a 米.10 分钟后,甲望建筑物 P 在北 a 度西(即北偏西 a 度),乙望建筑物 P 在北 β 度东(即北偏东 β 度),求 O 与 P 之间的距离.

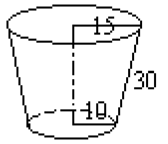
3.解方程 $x^4+1=0$;并且证明:平面内表示这个方程的根的四个点是一个正方形的顶点.

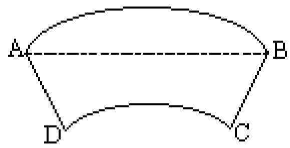
4.已知 A、B、C 是三角形的三个内角,求证:

$$\cos A=\frac{\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A}{2\sin B\sin C}$$

5.已知方程 $x^3+mx^2-3x+n=0$ 的三个根的平方和为 6,且知这个方程有两相等的正根,求 m、n 的值.

6.圆台形铁桶的上口半径是 15 厘米,下底半径是 10 厘米,母线长是 30 厘米,将铁桶的侧面沿一条母线剪开铺平,得图中扇面形状的铁片 ABCD.求 A、B 两点间的距离.



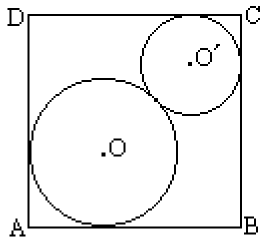


7.A、B、C、D 四个点在平面 M 和平面 N 之外,A、B、C、D 在平面 M 内的射影是 A_1、B_1、C_1、D_1,在平面 N 内的射影是 A_2、B_2、C_2、D_2.已知 A_1、B_1、C_1、D_1 在一条直线上,$A_2B_2C_2D_2$ 是一个平行四边形,求证 ABCD 也是一个平行四边形.

8.下图中 ABCD 是正方形,其每边长为 1;在正方形内,⊙O 与⊙O'互相外切,并且⊙O 与 AB、AD 两边相切,⊙O' 与 CB、CD 两边相切.

(1)求这两圆半径之和.

(2)当两圆半径各多么长时,两圆面积之和最小?当半径各多么长时,面积之和最大?证明你的结论.



附加题

(1)如果把第 8 题中的正方形改成矩形,你能得到什么结果?为什么?

(2)如果把第 8 题中的正方形改成棱长为 1 的正方体,把圆改成球,你能得到什么结果?为什么?

1964 年试题答案

1.解法一:

$$原式=\frac{[3^{-\frac{3}{2}}(\frac{1}{3})^{-3}]^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt{3}-1)^{2}}$$

$$=\frac{3^{-\frac{1}{2}}\cdot 3}{(\sqrt{3}-1)^{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)^{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+3}{2}.$$

解法二:

$$原式=\frac{[3^{-\frac{3}{2}}(\frac{1}{3})^{-3}]^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt{3}-1)^{2}}$$

$$=\frac{3^{-\frac{1}{2}}\cdot 3}{(\sqrt{3}-1)^{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)^{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)^{2}}{[(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)]^{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(4+2\sqrt{3})}{4}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+3}{2}.$$

2.解:如图,设 OB=x,则 OA=x+10a.

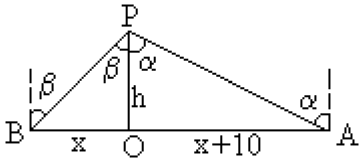
再设 OP=h,则

$h\operatorname{tg}\alpha=x+10a$,

$h\operatorname{tg}\beta=x$.

$h(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)=10a$,

$$\therefore\quad h=\frac{10a}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}.$$



3.解法一:原方程即 $x^4=-1$,也就是

$x^4=\cos(2k+1)\pi+i\sin(2k+1)\pi$

$$\therefore x=\cos\frac{2k+1}{4}\pi+i\sin\frac{2k+1}{4}\pi.$$

令 k=0、1、2、3,就得到原方程的四个根:

$$x_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$x_2=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$x_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),$$

$$x_4=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),$$

显然,$|x_1|=|x_2|=|x_3|=|x_4|=1$,故平面内表示这四个根的点 M_1、M_2、M_3、M_4 都在单位圆上

如图,$\angle M_1OM_2$ 等于 x_2 的辐角减去 x_1 的辐角,故

$$\angle M_1OM_2=\frac{\pi}{2}$$

同理, $\angle M_2OM_3=\angle M_3OM_4=\frac{\pi}{2}.$

又显然有 $\angle M_4OM_1=\frac{\pi}{2}.$

$\therefore M_1M_2=M_2M_3=M_3M_4=M_4M_1.$

$\therefore M_1M_2M_3M_4$ 是一个正方形.

解法二:$x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2$

$$=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2$$

$$=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

∴原方程即

$$(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)=0.$$

它的根是

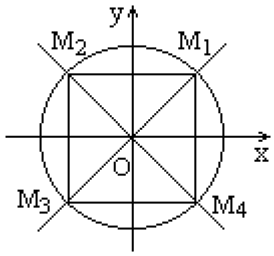
$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),x_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

如图,线段 M_2M_1 与 M_3M_4 显然都平行于 OX 轴,线段 M_4M_1 与 M_3M_2 都平行于 OY 轴.

又$M_1M_2=M_2M_3=M_3M_4=M_4M_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$

所以 $M_1M_2M_3M_4$ 是一个正方形.



4.解法一:利用正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

得到 $\sin A=\frac{a}{2R},\sin B=\frac{b}{2R},\sin C=\frac{c}{2R}.$

代入所要证明的等式的右边,并化简得

$$\frac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

由余弦定理,上式右边就是 cosA.

解法二:利用 $A=\pi-(B+C)$,

$\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\sin^2B+\sin^2c-\sin^2(B+C)$

$=\sin^2B+\sin^2C-(\sin B\cos C+\cos B\sin C)^2$

$=\sin^2B+\sin^2C-\sin^2B\cos^2C-\cos^2B\sin^2C-2\sin B\sin C\cos B\cos C$

$=\sin^2B(1-\cos^2C)+\sin^2C(1-\cos^2B)-2\sin B\sin C\cos B\cos C$

$=2\sin^2B\sin^2C-2\sin B\sin C\cos B\cos C$

$=2\sin B\sin C(\sin B\sin C-\cos B\cos C)$

$=2\sin B\sin C[-\cos(B+C)]$

$=2\sin B\sin C\cdot\cos[\pi-(B+C)]$

$=2\sin B\sin C\cos A.$

两边除以 2sinBsinC,得到

$$\frac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}=\cos A.$$

5.解法一:设这个方程的三个根为α、α、β.根据已知条件和根与系数的关系,得

$$\begin{cases}2a^2+b^2=6, & (1)\\ a^2+2ab=-3. & (2)\end{cases}$$

(2)的两边乘以 2,得

$2\alpha^2+4\alpha\beta=-6,(3)$

(1)与(3)的两边分别相加,得

$4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=0,$

即$(2\alpha+\beta)^2=0,$

$\therefore \beta=-2\alpha.$

代入(1),$2\alpha^2+(-2\alpha)^2=6,$

$6\alpha^2=6,\therefore \alpha=\pm1.$

α=-1 不符合题意,舍去.

故α=1,β=-2.

∴m=-(2α+β)=0,

n=-α²β=2.

解法二:仿解法一得

$$\begin{cases} 2a^2+b^2=6, & (1) \\ a^2+2ab=-3. & (2) \end{cases}$$

由$(2), b=\dfrac{-3-a^2}{2a}$,

代入$(1), 2\alpha^2+(\dfrac{-3-\alpha^2}{2\alpha})^2=6$,

代简,得$\alpha^4-2\alpha^2+1=0$,

即$(\alpha^2-1)^2=0$,

∴α=±1.

α=-1 不合题意,舍去.

故α=1,代入(2)得,β=-2.

∴m=-(2α+β)=0,

n=-α²β=2.

6.解法一:

$$\overset{\frown}{AB}=2\pi\cdot 15=30\pi,\ \overset{\frown}{CD}=2\pi\cdot 10=20\pi.\quad AD=30.$$

延长 AD、BC 相交于 O,设∠COD=θ,OD=x,则

(x+30)θ=30π,

xθ=20π,

相减,得 30θ=10π,

$$q=\frac{p}{3},$$

$$x=\frac{20p}{q}=60.$$

因为△OAB 是一个等边三角形,所以

AB=OA=90(厘米).

解法二:

$$\overset{\frown}{AB}=2p\cdot 15=30p,\overset{\frown}{CD}=2p\cdot 10=20p.AD=30,$$

延长 AD、BC 相交于 O,设 OD=x,则

$$\frac{x+30}{x}=\frac{30p}{20p}.$$

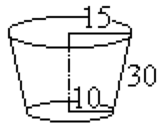
解出 x,得

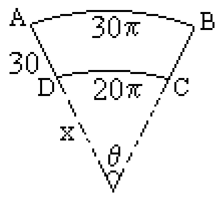
x=60,

$$q=\frac{20p}{60}=\frac{p}{3}.$$

因为△OAB 是一个等边三角形,所以

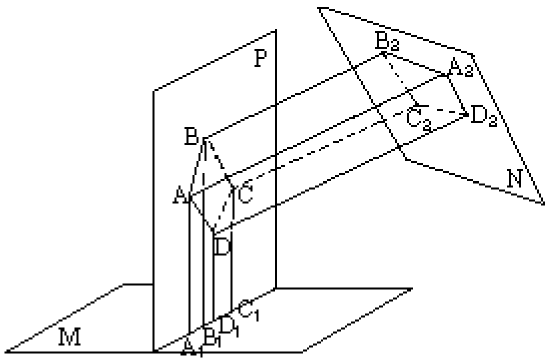
AB=OA=90(厘米).





7.解:如图,设 A_1、B_1、C_1、D_1 所在的直线为 l,过直线 l 与直线作 AA_1 作一平面 P,则 P 必垂直于 M.显然 A 在平面 P 内.又因 B_1 在平面 P 内,且直线 BB_1 垂直于平面 M,故 BB_1 必在平面 P 内.因而 B 也在平面 P 内.同理,C、D 也在平面 P 内.

因 AA_2∥DD_2,且 A_2B_2∥D_2C_2,故由 AA_2 与 A_2B_2 所决定的平面平行于由 DD_2 与 D_2C_2 所决定的平面.又 P 与这两个平面的交线分别为 AB 与 CD,故 AB∥CD.同理 BC∥AD.故 ABCD 是平行四边形.



8.解法一:

(1)设⊙ O与 AB 相切于 P,⊙ O'与 BC 相切于 Q.连 OP,O'Q.作 O'R⊥AB ,OS⊥ O'R.令 r 与 r'分别表示⊙ O与⊙ O'的半径,又令 s=r+r'.容易看出:O 、O'在对角线 AC 上,△ OAP 是等腰直角三角形,而 O'RBQ 和 OPRS 是矩形.因此,

AP=OP=r,RB=O'Q=r',

∴ OS=PR=1-(r+r')=1-s.

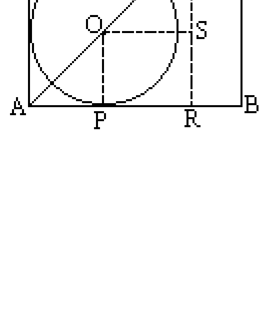
又△ O'OS 也是等腰直角三角形,所以

$$OO' = \sqrt{2}OS = \sqrt{2}(1-s),$$

但 OO'是两圆连心线,所以 OO'=r+r'=s.故由上式得

$$s = \sqrt{2}(1-s),$$

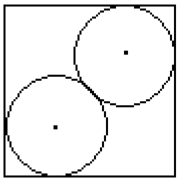
$$\therefore \quad s = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}. \qquad (\text{I})$$



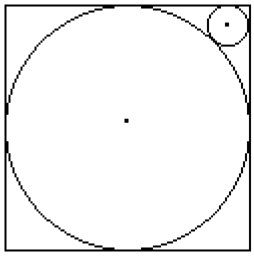
(2)两圆面积之和是

$$\pi(r^2+r'^2)=\pi[r^2+(s-r)^2]$$
$$= \pi[r^2+(2-\sqrt{2}-r)^2] \qquad [由(Ⅰ)]$$
$$= 2\pi[r^2-(2-\sqrt{2})r+3-2\sqrt{2}]$$
$$= 2p[(r-\frac{2-\sqrt{2}}{2})^2+\frac{3-2\sqrt{2}}{2}]. \qquad (Ⅱ)$$

因此,当$r=\frac{2-\sqrt{2}}{2}, r'=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$时,面积之和最小.



现在讨论当半径各多么长时,面积之和最大.不妨先设 r≥r ',即不妨设$r\geq\frac{2-\sqrt{2}}{2}$[由(Ⅰ)].但显然$r\leq\frac{1}{2}$,故由(Ⅱ),当$r=\frac{1}{2}, r'=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$时,面积之和最大.同理,当$r'=\frac{1}{2}, r=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$时,面积之和也是最大.



解法二:

$(1) AO=AP\sqrt{2}=r\sqrt{2}, OO'=r+r', O\quad C=O'Q\sqrt{2}=r'\sqrt{2}$,

$\because\quad AC=\sqrt{2}, \therefore r\sqrt{2}+r+r'+r'\sqrt{2}=\sqrt{2}$,

即 $\quad(1+\sqrt{2})(r+r')=\sqrt{2}$,

$\quad(1+\sqrt{2})s=\sqrt{2}$,

$\therefore\quad s=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}.$

(2)两圆面积之和是

$$\pi(r^2+r'^2)=\frac{1}{2}\pi[(r+r')^2+(r-r')^2]. \qquad (Ⅲ)$$

因$r+r'=2-\sqrt{2}$为定值,故当$r-r'=0$即$r=r'=\frac{s}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$时,

两圆面积之和最小.

现在讨论当半径多么长时面积之和最大.不妨先设r≥rv,即$r\geq\frac{s}{2}$.

由(III),得

$$\pi(r^2+r'^2)=\frac{\pi}{2}[s^2+(2r-s)^2]$$

$$=\frac{p}{2}[s^2+4(r-\frac{s}{2})^2].$$

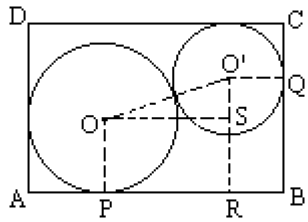
但显然$r\le\frac{1}{2}$**,故当**$r=\frac{1}{2},r'=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$**时,面积之和最大.**

同理,当$r'=\frac{1}{2},\ r=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$**时,面积之和也是最大**.

附加题

(1)如果把第 8 题中的正方形改成矩形,你能得什么结果?为什么?

解:设 ABCD 为矩形,AB=a.BC=b.设⊙ O与⊙ O′ 互相外切,并且⊙O与 AB 、 AD 相切,⊙ O'与 CB 、 CD 相切.令⊙ O与⊙ O'的半径分别为 r 与r',其和为 s.设⊙ O切 AB 于 P,⊙ O′切 BC 于 Q.连 OO'.作 O'R⊥AB, OS⊥O'R.



容易看出:AP=r,RB=O'Q=r'.

因此,　　　　OS=PR=a-s.

仿此,　　　　O'S=b-s.

但△OSO'是直角三角形,而 OO'=r+r'=s,

故得　　　　$(a-s)^2+(b-s)^2=s^2$.

即　　　　$s^2-2(a+b)s+a^2+b^2=0$.

解得　　　　$s=a+b\pm\sqrt{2ab}.$

显然 s<a+b,故应取“ - ”号.因此

$$s=a+b-\sqrt{2ab}.\qquad (\text{I})$$

另一方面,两圆面积之和为

$$\pi(r^2+r'^2)=\frac{\pi}{2}[(r+r')^2+(r-r')^2]$$

$$=\frac{\pi}{2}[s^2+(r-r')^2].\qquad (\text{II})$$

显然当$r=r'=\frac{1}{2}(a+b-\sqrt{2ab})$**时,面积之和最小**.

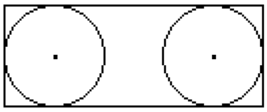
又由(II)有

$$\pi(r^2+r'^2)=\frac{\pi}{2}[s^2+(2r-s)^2].\qquad (\text{III})$$

现在讨论当半径多么长时面积之和最大.不妨先设$r\ge r'$**,即**$r\ge\frac{s}{2}$

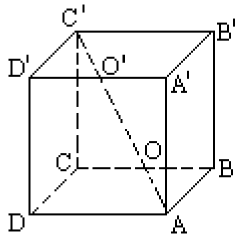
但r**不能超过**$\frac{a}{2}$**与**$\frac{b}{2}$**中的较小者,设为**$\frac{b}{2}$**,则由(III),当**$r=\frac{b}{2},r'=a+\frac{b}{2}-\sqrt{2ab}$

时,积之和最大.同理,当$r'=\frac{b}{2},r=a+\frac{b}{2}-\sqrt{2ab}$**时,面积之和也是最大**.



(2)如果把第 8 题中的正方形改成棱长为 1 的正方体,把圆改成球,你能得到什么结果?为什么?

解:设球 O 与球 O′ 互相外切,并且都在正方体 ABCD—B′A′C′D′内部.设球 O 与过 A 的三个面相切,球 O′与 C′的三个面相切.设球 O 与球的半径分别为 r 与 r′,r+r′=s.



和正方形的情况相仿,以 O、O′为相对的两个顶点作正方体,使它的各面平行于原正方体的相应各面,可得

$$s=\sqrt{3}(1-s),$$

$$\therefore s=\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

两球表面积之和是

$$4\pi(r^2+r'^2)=2\pi[(r+r')^2+(r-r')^2]$$
$$=2\pi[s^2+(r-r')^2]$$
$$=2\pi[s^2+(2r-s)^2].$$

故当 $r=r'=\frac{s}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ 时,表面积之和最小.同样,当 $r=\frac{1}{2}, r'=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$;

或 $r'=\frac{1}{2}, r=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ 时,表面积之和最大.

两球体积之和是

$$\frac{4}{3}\pi(r^3+r'^3)=\frac{4\pi}{3}s(r^2-rr'+r'^2)$$
$$=\frac{\pi}{3}s[s^2+3(r-r')^2]$$
$$=\frac{\pi}{3}s[s^2+3(2r-s)^2].$$

故当 $r=r'=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ 时,体积之和最小.同样,当 $r=\frac{1}{2}, r'=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$;

或 $r'=\frac{1}{2}, r=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ 时,体积之和最大.