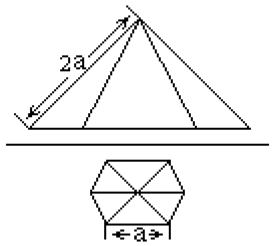
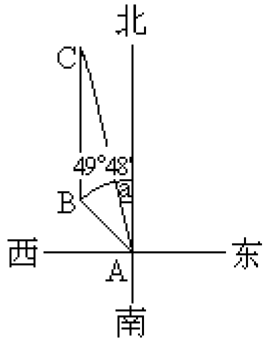
1965 年试题

1． 右面的二视图所表示的立体是什么?求出它的体积．



2．在 A 处的甲船测得乙船在北偏西 49°48′的 B 处以速度 22浬/小时向正北方向行驶．甲船立即从 A 处出发，以速度 26浬/小时向北偏西 a 度的方向沿直线驶去，追赶乙船．问 a 是多大角度时，经过一段时间，甲船能够在某处 C 恰好与乙船相遇?(lg2.2=0.3424，lg2.6=0.4150;lg 是以 10 为底的对数符号.)



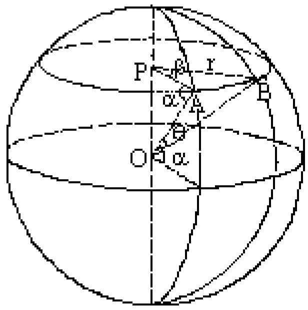
正弦对数表

A	0’	6’	12’	18’	24’	30’	36’	42’	48’	54’	60’		1’	2’	3’
40°	1.8081	8090	8099	8108	8117	8125	8134	8143	8152	8161	8169	49	1	3	4
41°	8169	8178	8187	8195	8204	8213	8221	8230	8238	8247	8255	48	1	3	4
42°	8255	8264	8272	8280	8289	8297	8305	8313	8322	8330	8338	47	1	3	4
43°	8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410	8418	46	1	3	4
44°	8418	8426	8433	8441	8449	8457	8464	8472	8480	8487	1.8495	45	1	3	4
45°	1.8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562	8569	44	1	3	4
46°	8569	8577	8584	8591	8598	8606	8613	8620	8627	8634	8641	43	1	3	4
47°	8641	8648	8655	8662	8669	8676	8683	8690	8697	8704	8711	42	1	3	4
48°	8711	8718	8724	8731	8738	8745	8751	8758	8765	8771	8778	41	1	3	4
49°	8778	8784	8791	8797	8804	8810	8817	8823	8830	8836	1.8843	40	1	3	4

余弦对数表

3.把地球看作半径为 R 的球.设 A、B 两地的纬度相同，都是 a 度，它们的经度相差β度(0°<β≤180°).求 A、B 两地之间的球面距离（即大圆

弧长）.



4.(1)证明｜sin2x｜≤2｜sinx｜.（x 为任意值）

(2)已知 n 为任意正整数，用数学归纳法证明

｜sinnx｜≤n｜sinx｜.（x 为任意值）

5.已知一点 P 的坐标是(4，-2)，直线 l 的方程是 y-x+5=0，曲线 C 的方程是 $\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$.**求经过P点而与l垂直的直线和曲线C的交点的坐标.并画出此题的略图.**

6.当 p 是什么实数时，方程 $x^2+px-3=0$ 与方程 $x^2-4x-(p-1)=0$ 有一个公共根?并求出这个公共根.

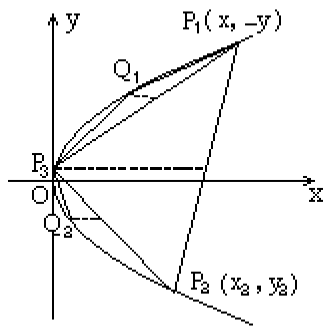
7.已给抛物线 $y^2=2x$.

(1)在抛物线上任取两点 $P_1(x_1，y_1)$、$P_2(x_2，y_2)$.经过线段 P_1P_2 的中点作直线平行于抛物线的轴，和抛物线交于点 P_3.证明

$\triangle P_1P_2P_3$的面积为 $\frac{1}{16}|y_1-y_2|^3$.

(2)经过线段 P_1P_3 和 P_2P_3 的中点，分别作直线平行于抛物线的轴，和抛物线依次交于 Q_1、Q_2.试将$\triangle P_1P_3Q_1$ 与$\triangle P_2P_3Q_2$ 的面积的和用 y_1、y_2 表示出来.

(3)仿照(2)，又可以作出四个更小的三角形.照这样继续下去，可以作出一系列的三角形.由此设法求出线段 P_1P_2 与抛物线所围成的图形的面积.



8.附加题：

(1)已知 a、b、c 为实数，证明 a、b、c 都为正数的充要条件是：

a+b+c>0，ab+bc+ca>0，abc>0.

(2)已知方程

$x^3+px^2+qx+r=0$

的三个根 a、β、γ都是实数，证明 a、β、γ是一个三角形的三个边长的充要条件是：

$$\begin{cases} p < 0, q > 0, r < 0, \\ p^3 > 4pq - 8r \end{cases}$$

1965 年试题答案

1.解：右面的二视图所表示的立体是正六棱锥.

设这个六个棱锥的高是 h，底面积是 A，体积是 V，则有

$$h = \sqrt{3}a,$$

$$A = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}hA = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}a \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^3.$$

注：本题考二视图和计算棱锥的体积.

正弦对数表

A	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'	60'		1'	2'	3'
40°	1.8081	8090	8099	8108	8117	8125	8134	8143	8152	8161	8169	49	1	3	4
41°	8169	8178	8187	8195	8204	8213	8221	8230	8238	8247	8255	48	1	3	4
42°	8255	8264	8272	8280	8289	8297	8305	8313	8322	8330	8338	47	1	3	4
43°	8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410	8418	46	1	3	4
44°	8418	8426	8433	8441	8449	8457	8464	8472	8480	8487	1.8495	45	1	3	4
45°	1.8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562	8569	44	1	3	4
46°	8569	8577	8584	8591	8598	8606	8613	8620	8627	8634	8641	43	1	3	4
47°	8641	8648	8655	8662	8669	8676	8683	8690	8697	8704	8711	42	1	3	4
48°	8711	8718	8724	8731	8738	8745	8751	8758	8765	8771	8778	41	1	3	4
49°	8778	8784	8791	8797	8804	8810	8817	8823	8830	8836	1.8843	40	1	3	4

余弦对数表

2.解：设甲船与乙船相遇所需要的时间为 t，则有

BC=22t，AC=26t.

由正弦定理，得

$$\frac{26t}{\sin(180° - 49° 48')} = \frac{22t}{\sin(49° 48' - \alpha)},$$

$$\therefore \sin(49° 48' - \alpha) = \frac{22}{26}\sin 49° 48'.$$

对上式两边取对数，得

lgsin(49°48′-a)

$=\lg 22-\lg 26+\lg\sin 49°48'$

$=1.3424-1.4150+\bar{1}.8830$

$=\bar{1}.8104$

查表得到

$49°48'-a=40°15'.$

$\therefore a=49°48'-40°15'=9°33'.$

注：本题考解任意三角形的基本方法，并考查学生查表和运用对数计算的能力.

3.解法一：

设 A、B 两地之间的球面距离为 x，大圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角为 θ 度，则

$$x=\frac{\pi\theta}{180}R. \qquad (1)$$

设纬度为 a 的纬度圈的圆心为 P，半径为 r，则∠APB=β.因为△PAB 是等腰三角形，所以 A、B 之间的直线距离

$$AB=2r\sin\frac{\beta}{2}.$$

又在直角三角形 *OAP* 中，∠OAP=a，可知

r=Rcosa.

所以 $AB=2R\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}$

又在等腰三角形 OAB 中，可以求得

$$AB=2R\sin\frac{\theta}{2}$$

所以 $2R\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}=2R\sin\frac{\theta}{2},$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2},$$

即 $\theta=2\arcsin(\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}).$

代入(1)，得

$$x=\frac{\pi R}{180}\cdot 2\arcsin(\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2})$$

$$=\frac{\pi R}{90}\arcsin(\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}).$$

答：A、B 两地之间的球面距离为

$$\frac{\pi R}{90}\arcsin(\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}).$$

解法二：

设 A、B 两地之间的球面距离为 x，大圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角为 θ 度，则

$$x=\frac{\pi\theta}{180}R. \qquad (1)$$

设纬度为 a 的纬度圈的圆心为 P，半径为 r，则∠APB=β.在△PAB 中，

根据余弦定理得 A、B 之间的直线距离的平方

$$AB^2=2r^2-2r^2\cos\beta=2r^2(1-\cos\beta)\cdot$$

又在直角三角形 OAP 中，∠OAP=a 可知

$$r=R\cos a\cdot$$

所以 $AB^2=2R^2\cos^2 a(1-\cos\beta)$.

又在△OAB 中，根据余弦定理，得

$AB^2=2R^2(1-\cos\theta)$.

所以 $2R^2\cos^2 a(1-\cos\beta)=2R^2(1-\cos\theta)$.

由此，$\cos\theta=1-\cos^2 a(1-\cos\beta)$，

即 $\theta=\arccos[1-\cos^2 a(1-\cos\beta)]$.

代入(1)，得

$$x=\frac{\pi R}{180}\arccos[1-\cos^2\alpha(1-\cos\beta)].$$

答：A、B 两地之间的球面距离为

$$\frac{\pi R}{180}\arccos[1-\cos^2\alpha(1-\cos\beta)].$$

注：本题考运用几何与三角的基本知识，计算球面距离.

4.解：(1) $|\sin 2x|=|2\sin x\cos x|$

$$=2|\sin x|\cdot|\cos x|$$

$$\leq 2|\sin x|.(\because|\cos x|\leq 1)$$

(2)当 n=1 时，$|\sin x|=|\sin x|$，不等式成立.

设当 n=k 时不等式成立，今证明当 n=k＋1 时，不等式也成立.因为

$$\sin(k+1)x=\sin kx\cos x+\cos kx\sin x,$$

所以根据绝对值不等式的性质，得到

$$|\sin(k+1)x|\leq|\sin kx|\cdot|\cos x|+|\cos kx|\cdot|\sin x|.$$

又根据归纳法的假设和 $|\cos x|\leq 1$ 及 $|\cos kx|\leq 1$，得到

$$|\sin(k+1)x|\leq k|\sin x|+|\sin x|=(k+1)|\sin x|.$$

因此，不等式对一切正整数 n 都成立.

注：本题主要考数学归纳法和绝对值不等式.第一小题的目的是启发学生应用 $|\cos x|\leq 1$ 来证明不等式.

5.解：直线 l 的方程也可以写成

$y = x-5$,

所以 l 的斜率是 1，与 l 垂直的直线的斜率应为-1.

因此，经过 P 点而与直线 l 垂直的直线 l' 的方程是

$$y+2=-(x-4),$$

即

$$x+y-2=0.$$

要求 l' 与 C 的交点坐标，只须解下列方程组

$$\begin{cases} x+y-2=0, & (1)\\ \dfrac{(x+1)^2}{2}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1. & (2)\end{cases}$$

由(1)式解得

$y=-x+2$，(3)

代入(2)式并化简，得到

$3x^2+2x-1=0$，

或 $(3x-1)(x+1)=0$.

$\therefore x=\frac{1}{3},\ x_2=-1.$

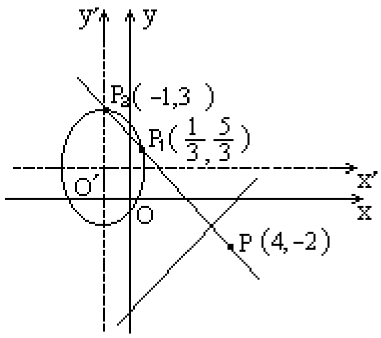
代入(3)式，得到

$y_1=\frac{5}{3},\ y_2=3.$

因此，直线l'与曲线C有两个交点，它们的坐标是$(\frac{1}{3},\ \frac{5}{3}),(-1,3)$.

曲线C是椭圆，它的中心在$(-1,1)$，长轴和短轴都平行于坐标轴，长度为4和$2\sqrt{2}$

略图如下：



注 1：本题主要考直线的斜率、直线的方程以及直线与二次曲线的交点等最基本的解析几何知识.

注 2：画出的略图应包括所给的以及所求出的点、直线和曲线的图形.

6.解法一：

设这两个方程的公共根是 a，则有

$$\begin{cases} a^2+pa-3=0, & (1) \\ a^2-4a-(p-1)=0. & (2) \end{cases}$$

现在的问题是求 p 和 a 的值.为此，我们先从(1)、(2)两式消去 p.

由(2)式得

$p=a^2-4a+1$.

代入(1)式并化简，就得到

$a^3-3a^2+a-3=0$.

分解因式得

$(a-3)(a^2+1)=0$. (3)

因为 p 是实数，$\pm i$ 不可能是方程 $x^2+px-3=0$ 的根，所以 $a=3$.

将 $a=3$ 代入(1)，得到

$9+3p-3=0$，

$\therefore p=-2$.

解法二：

设这两个方程的公共根是 a，则有

$$\begin{cases} a^2+pa-3=0, & (1) \\ a^2-4a-(p-1)=0. & (2) \end{cases}$$

现在的问题是求 p 与 a 的值.为此，我们先从(1)、(2)两式消去 a.

(1)式减(2)式，得

$$(p+4)a+p-4=0,$$

显然，$p\neq -4$，所以有

$$a=\frac{-(p-4)}{P+4}$$

代入(1)式并化简，得到

$$p^3+2p^2+16p+32=0.$$

分解因式，得

$$(p+2)(p^2+16)=0.$$

因 p 是实数，$p^2+16\neq 0$，

所以 $p=-2$.

将 $p=-2$ 代入(3)式，就得到 $a=3$.

解法三：

解已知的两个方程，得知它们的根分别是：

$$x=-\frac{p}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12},\quad x=2\pm\sqrt{p+3}.$$

要使两个方程有一个公共根，有下面四种可能的情况

$$-\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12}=2+\sqrt{p+3}$$

$$-\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12}=2-\sqrt{p+3}$$

$$-\frac{p}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12}=2+\sqrt{p+3}$$

$$-\frac{p}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12}=2-\sqrt{p+3}$$

移项，得到

$$2+\frac{p}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12}-\sqrt{p+3} \qquad (1)$$

$$2+\frac{p}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12}+\sqrt{p+3} \qquad (2)$$

$$2+\frac{p}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12}-\sqrt{p+3} \qquad (3)$$

$$2+\frac{p}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12}+\sqrt{p-3} \qquad (4)$$

将(1)式两边平方，得到

$$4+2p+\frac{p^2}{4}=\frac{1}{4}p^2+3+p+3-\sqrt{p^2+12}\sqrt{p+3},$$

化简，得

$$p-2=-\sqrt{p^2+12}\cdot\sqrt{p+3}.$$

再平方并化简，得

$$p^3+2p^2+16p+32=0.$$

不难看出，有理化(2)或(3)或(4)都得到同样的结果.

将上面得到的方程的左边分解因式，得

$$(p+2)(p^2+16)=0.$$

因 p 是实数，所以 $p=-2$.

将 $p=-2$ 代入原方程，得到

$$x^2-2x-3=0，x^2-4x+3=0.$$

解这两个方程，得到一个公共根 $x=3$.

注：本题考查学生根据已知条件建立方程及解方程的能力.

7.解：(1)设 P_3 的坐标是$(x_3，y_3)$，则$\triangle P_1P_2P_3$ 的面积是行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

的绝对值的一半.

现在来计算△的值：

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2}y_1^2 & y_1 \\ 1 & \frac{1}{2}y_2^2 & y_2 \\ 1 & \frac{1}{2}y_3^2 & y_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}[y_3^2(y_1-y_2)+y_3(y_2^2-y_1^2)+y_1y_2(y_1-y_2)].$$

因为P_3在经过P_1P_2的中点而平行于x轴的直线上，所以$y_3=\frac{y_1+y_2}{2}$,

代入上式并化简，就是到

$$\Delta=-\frac{1}{8}(y_1-y_2)^3.$$

因此，$\triangle P_1P_2P_3$ 的面积是：

$$A_1=\frac{1}{2}|\Delta|=\frac{1}{16}|y_1-y_2|^3.$$

(2)仿照(1)可求得$\triangle P_1P_3Q_1$ 与$\triangle P_2P_3Q_2$ 的面积分别为

$$A'=\frac{1}{16}|y_1-y_3|^3，A''=\frac{1}{16}|y_3-y_2|^3.$$

由题意知

$$|y_1-y_3|=|y_3-y_2|=\frac{1}{12}|y_1-y_2|,$$

$$\therefore A'=A''=\frac{1}{16}\times\frac{1}{2^3}|y_1-y_2|^3=\frac{1}{8}A_1.$$

因此，$\triangle P_1P_3Q_1$ 与$\triangle P_2P_3Q_2$ 的面积的和是

$$A_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}|y_1-y_2|^3=\frac{1}{4}A_1.$$

(3)经过线段 P_1Q_1、Q_1P_3、P_3Q_2、Q_2P_2 的中点分别作直线平行于抛物线的轴，和抛物线依次交于 R_1、R_2、R_3、R_4.

与(1)、(2)同理，可以知道$\triangle P_1R_1Q_1$、$\triangle Q_1R_2P_3$、$\triangle P_3R_3Q_2$、$\triangle Q_2R_4P_2$ 的面积

都等于$\frac{1}{8}A' = \frac{1}{8}A'' = \frac{1}{64}A_1$.

因此，这四个三角形的面积的和是

$$A_3 = 4 \cdot \frac{1}{64}A_1 = \frac{1}{16}A_1 = \frac{1}{4^2}A_1.$$

第一步、第二步、第三步所得到的三角形的面积的总和是

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_1 + \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{4^2}A_1.$$

照这样继续下去,每一步所得到的三角形的面积的和都等于前一步所得到的三角形面积和的$\frac{1}{4}$.这一系列三角形面积的总和无限接近于线段P_1P_2与抛物线所围成的图形的面积，由此可知，这个图形的面积是

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots = (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots)A_1$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}}A_1 = \frac{4}{3}A_1 = \frac{1}{12}|y_1 - y_2|^3.$$

注1：本题是解析几何与代数的综合题，第一小题主要考三角形面积的计算.第二小题和第三小题主要是考查学生从具体结果总结出较普遍的公式的能力，以及代数计算能力.

注2：(1)也可以用下面的方法来作.令P_4表P_1P_2的中点，则P_4的坐标是

$$(\frac{y_1^2 + y_2^2}{4}, \frac{y_1 + y_2}{2}).$$

$$\therefore P_3P_4 = \frac{y_1^2 + y_2^2}{4} - \frac{(y_1 + y_2)^2}{8} = \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2) = \frac{1}{8}(y_1 - y_2)^2.$$

$\triangle P_1P_3P_4$的面积是

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}(y_1 - y_2)^2 \left| y_1 - \frac{y_1 + y_2}{2} \right| = \frac{1}{32}|y_1 - y_2|^3.$$

同理$\triangle P_2P_3P_4$的面积也是$\frac{1}{32}|y_1 - y_2|^3$.

$\therefore P_1P_2P_3$的面积是

$$A_1 = 2 \cdot \frac{1}{32}|y_1 - y_2|^3 = \frac{1}{16}|y_1 - y_2|^3.$$

8.附加题：

解法一：

(1)条件的必要性是显然的，所以只须证明充分性.

利用方程的根与系数的关系，我们知道a、b、c是方程

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$$

的三个根.因为常数项不为0,所以x=0不可能是方程的根.又以任何负数代入方程左端，各项都为负数，所以任何负数都不是方程的根.因此a、b、c都是正数.

(2)α、β、γ为一个三角形的三个边长的充要条件应该是：

$$\begin{cases}\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\\ \alpha+\beta>\gamma,\ \beta+\gamma>\alpha,\ \gamma+\alpha>\beta.\end{cases}$$

由(1)可知 $a>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$ 的充要条件是：

$$a+\beta+\gamma>0,\ a\beta+\beta\gamma+\gamma a>0,\ a\beta\gamma>0.$$

即 $-p>0$，$q>0$，$-r>0$.

现在来求

$$a+\beta>\gamma,\ \beta+\gamma>a,\ \gamma+a>\beta$$

的充要条件，也就是求

$$a+\beta-\gamma>0,\ \beta+\gamma-a>0,\ \gamma+a-\beta>0$$

的充要条件，利用根与系数的关系，$a+\beta+\gamma=-p$.

于是

$$a+\beta-\gamma=-p-2\gamma,$$
$$\beta+\gamma-a=-p-2a,$$
$$\gamma+a-\beta=-p-2\beta.$$

因此，问题化为求

$$-p-2a>0,\ -p-2\beta>0,\ -p-2\gamma>0$$

的充要条件，由(1)的结论，它的充要条件应为

$$\begin{cases}(-p-2\alpha)+(-p-2\beta)+(-p-2\gamma)>0, & (1)\\ (p+2\alpha)(p+2\beta)+(p+2\beta)(p+2\gamma)+(p+2\gamma)(p+2\alpha)>0, & (2)\\ -(p+2\alpha)(p+2\beta)(p+2\gamma)>0. & (3)\end{cases}$$

化简不等式(1)，得

$$-p>0.$$

不等式(2)可化为：

$$3p^2+4(\alpha+\beta+\gamma)p+4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)>0,$$

即 $3p^2-4p^2+4q>0$，

即 $4q>p^2$.

不等式(3)可化为：

$$-p^3-2(\alpha+\beta+\gamma)p^2-4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)p-8\alpha\beta\gamma>0,$$

即 $-p^3+2p^3-4pq+8r>0$.

化简，得

$$p^3>4pq-8r.$$

综合以上的讨论，我们得到α、β、γ为一个三角形的三个边长的充要条件是

$$\begin{cases}p<0,\ q>0,\ r<0,\\ p^2<4q,\ p^3>4pq-8r.\end{cases}$$

但是，第四个不等式可以由第一、三、五这三个不等式推出.由第三、第五两个不等式得到

$$p^3>4pq,$$

又由第一个不等式，两端除以 p，即可得到

$$p^2<4q.$$

因此，为α、β、γ为一个三角形的三个边长的充要条件是

$$\begin{cases} p < 0，q > 0，r < 0， \\ p^3 > 4pq - 8r． \end{cases}$$

解法二：

(1)条件的必要性是显然的，所以只须证明充分性.

因为 abc>0，所以 a、b、c 三数或者都是正数，或者有两个是负数、一个是正数.前一种情况就是我们要证明的结论，所以只需证明后一种情况不可能成立即可.

用反证法来证明，不妨假设 a<0，b<0，c>0.

由 a＋b＋c>0， ab＋bc＋ca>0，得到

$$\begin{cases} c > -(a+b)， & (1) \\ ab > -(a+b)c． & (2) \end{cases}$$

因为-(a＋b)>0，，把(1)式两端都乘以-(a＋b)，得

$$-(a+b)c>[-(a+b)]^2. \quad (3)$$

由(2)、(3)得到

$$ab>[-(a+b)]^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

移项，得

$$a^2+ab+b^2<0.$$

因为左端各项都是正数，所以这是不可能的.因此，a、b、c 只能都是正数.

(2)同解法一.