# 云南1977年高考数学试题解

（一）（20分）

1．计算$\left(\dfrac{8x^{-3}}{\sqrt{y^3}Z^{-6}}\right)^{-\frac{1}{3}}=?$

2．计算 $\cos\dfrac{3\pi}{8}\cdot\cos\dfrac{\pi}{8}$之值.

3．计算 $\mathrm{Log}_3\dfrac{1}{27}+\mathrm{Log}_{\frac{1}{2}}8+\mathrm{Log}_2 8+\mathrm{Log}_4 64=?$

4．解方程　$2\sqrt{x-3}+6=x$.

解：1．$\left(\dfrac{8x^{-3}}{\sqrt{y^3}z^{-6}}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{2^3x^{-3}}{y^{\frac{3}{2}}z^{-6}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

$$=\frac{2^{-1}x}{y^{-\frac{1}{2}}z^2}$$

$$=\frac{x\sqrt{y}}{2z^2}$$

2．$\cos\dfrac{3\pi}{8}\cdot\cos\dfrac{\pi}{8}=\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\dfrac{\pi}{8}$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

3．$\mathrm{Log}_3\dfrac{1}{27}+\mathrm{Log}_{\frac{1}{2}}8+\mathrm{Log}_2 8+\mathrm{Log}_4 64$

$$=\mathrm{Log}_3 3^{-3}+\mathrm{Log}_{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{-3}+\mathrm{Log}_2 2^3+\mathrm{Log}_4 4^3$$

$$=-3\mathrm{Log}_3 3-3\mathrm{Log}_{\frac{1}{2}}\tfrac{1}{2}+3\mathrm{Log}_2 2+3\mathrm{Log}_4 4$$

$$=-3-3+3+3$$
$$=0.$$

4．　$2\sqrt{x-3}+6=x$

即　$(x-3)-2\sqrt{x-3}-3=0$

令　$\sqrt{x-3}=$　　代入上式得

$y^2-2y-3=0$

解之得$y=3$，$y=-1$；

$\therefore$　$\sqrt{x-3}=3$　　　$\therefore$　$x=1$．

$\sqrt{x-3}=-1$　　（无解）

答：$x=12$.

（二）某拖拉机厂为了支援农业生产，在予定期限内计划生产一批新型拖拉机，若按原来每天生产20台，则差 100 台不能按时完成任务；在揭批“四人帮”的伟大运动的推动下，每天生产了25台，结果到期比原计划超额50台，问原计划生产拖拉机多少台？予定期限是多少天？（10分）

解：设予定期限是x天，原计划生产拖拉机y台，根据题意得方程组

$$\begin{cases} y=20x+100 \cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ y=25x-50 \cdots\cdots\cdots\cdots (2) \end{cases}$$

比较（1）、（2）得

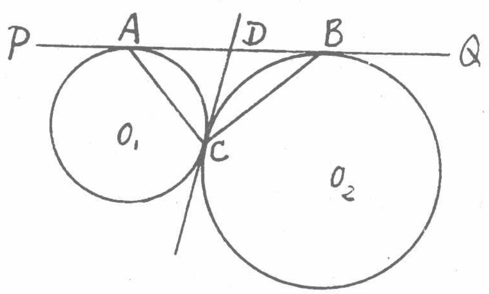
$20x+100=25x-50$

即 $5x=150$　　　$\therefore x=30$　（天）

代入（1）得$y=20\times30+100=700$（台）

答：原计划生产拖拉机700台，予定期限是30天.

（三）如图：设两园相切于C点，PQ是两园的外公切线，A、B分别为PQ与两园相切的切点，试证明$AC\perp BC$.　（12分）




证明：过C作两园的内公切线CD与PQ交于D点，

则$DA=DC$　$\therefore\angle DAC=\angle DCA$,

同理$DC=DB$ $\therefore\angle DCB=\angle DBC$,

而$\angle DAC+\angle DCA+\angle DCB+\angle DBC$

$=180^\circ$

$\therefore\angle ACB=\angle DCA+\angle DCB=90^\circ$

$\therefore AC\perp BC$.

（四）求过$x^2+y^2=4$上一点P（1，$\sqrt{3}$）的切线L的方程

解：过$x^2+y^2=4$上p(1，$\sqrt{3}$)点的切线方程是

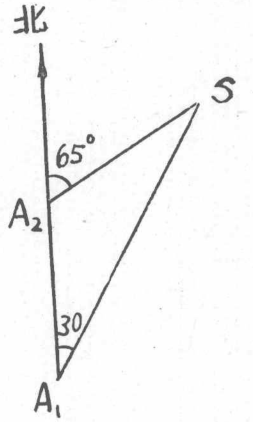
$1\cdot x+\sqrt{3}\,y=4$

即　　$x+\sqrt{3}\,y-4=0$

答：过$x^2+y^2=4$上一点p（1，$\sqrt{3}$）的L的切线方程是$x+\sqrt{3}\,y-4=0$

（五）一船以24浬/小时的速度向正北航行，在$A_1$点望见一灯塔S，在船的北偏东30°，15分钟后，在$A_2$点望见灯塔在船的北偏东65°（如图）求船在$A_2$点时，与灯塔的距离$A_2S$.

（已知$\sin 35^\circ = 0.574$）　　　（15分）




解：在$\triangle A_1A_2S$中，$\angle A_1SA_2 = 65^\circ - 30^\circ = 35^\circ$，

$A_1A_2 = 24 \times \frac{15}{60} = 6$（浬）.

根据正弦定理得$\frac{A_2S}{\sin\angle A_2A_1S} = \frac{A_1A_2}{\sin\angle A_1SA_2}$，

$$\frac{A_2S}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{\sin 35^\circ}$$

$$\therefore\quad A_2S = \frac{6 \times \sin 30^\circ}{\sin 35^\circ}$$

$$= \frac{6 \times \frac{1}{2}}{0.574}$$

$$\approx 5.23 \text{（浬）}$$

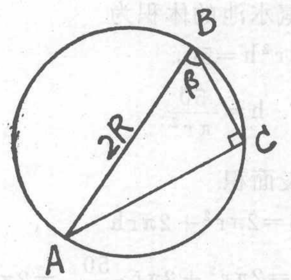
答：船在$A_2$点时与灯塔的距离约等于5.23浬

（六）直角三角形中的一个锐角为β，面积是12

1)求此三角形的外接园的面积；

2)当β取何值时，外接园的面积最小。

解：设这个直角三角形为ABC，且$\angle B = \beta$，斜边即它的外接园直径为$2R$(如图).




那末，三角形的两条直角边分别为$2R\sin\beta$和$2R\cos\beta$

依题意有

$\frac{1}{2} \cdot 2R\mathrm{si}\pi\beta \cdot 2R\cos\beta = 12$

$\therefore\quad R^2 = \frac{12}{\sin 2\beta}$

1)$\triangle ABC$外接园的面积$= \pi R^2 = \frac{12\pi}{\sin 2\beta}$

2)当$\sin 2\beta = 1$，即$\beta = 45^\circ$时$\triangle ABC$外接园的面积有最小值$12\pi$.

答：1)此三角形外接园的面积等于$\frac{12\pi}{\sin 2\beta}$.

2)当$\beta = 45^\circ$时，外接园的面积最小。

（七）一个三角形三边的比为4:5:6，面积为$27\sqrt{7}\,cm^2$求三边之长.　　　（15分）

解：设这个三角形三边之长分别为

$a=4x\text{cm}$，$b=5x\text{cm}$、$c=6x\text{cm}$，

记$s$为三角形周长的一半

那末$s=\dfrac{4x+5x+6x}{2}=\dfrac{15}{2}x$，

$s-a=\dfrac{15}{2}x-4x=\dfrac{7x}{2}$，

$s-b=\dfrac{15}{2}x-5x=\dfrac{5x}{2}$，

$s-c=\dfrac{15}{2}x-6x=\dfrac{3x}{2}$．

根据公式 $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 得

$$\sqrt{\frac{15x}{2}\cdot\frac{7x}{2}\cdot\frac{5x}{2}\cdot\frac{3x}{2}}=27\sqrt{7}$$

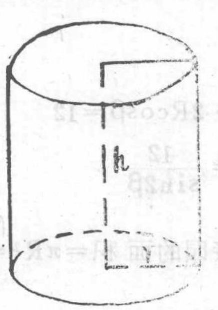
即 $\dfrac{15}{4}\cdot\sqrt{7}\cdot x^2=27\sqrt{7}$ $\therefore$ $x=\dfrac{6}{5}\sqrt{5}$

$\therefore$ $a=\dfrac{24}{5}\sqrt{5}$， $b=6\sqrt{5}$，$c=\dfrac{36}{5}\sqrt{5}$.

答：三边之长分别为$\dfrac{24}{5}\sqrt{5}$ cm，$6\sqrt{5}$ cm，$\dfrac{36}{5}\sqrt{5}$ cm.

参考题（自行选作）

（一）某生产队要建造一个体积为50立方米的有盖园柱形氨水池（如图）问这个氨水池高和底半径取多大时用料最省（即表面积最小）？




解法一、氨水池的体积为

$\pi r^2h=50$，

$\therefore$ $h=\dfrac{50}{\pi r^2}$

氨水池的表面积

$S=2\pi r^2+2\pi rh$

$=2\pi r^2+2\pi r\dfrac{50}{\pi r^2}=2\pi r^2+\dfrac{100}{r}$

$S'=4\pi r+(-1)\cdot\dfrac{100}{r^2}=4\pi r-\dfrac{100}{r^2}$，

$S''=4\pi+\dfrac{200}{r^3}$ $\because r>0$ $\therefore s''>0$．

$\therefore$当$s'=0$即$4\pi r-\dfrac{100}{r^2}=0$ 时

得　$r=\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}$，$h=\frac{50}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}\right)^2}=2\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}=2r.$

S有最小值

答：当这个氨水池的高取$2\sqrt[2]{\frac{25}{\pi}}$米，底半径取$\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}$米

即高等于底面的直径时用料最省

解法二.

此题也可以不利用导数，而用不等式求解.

由

$$\pi r^2 h=50$$

得

$$h=\frac{50}{\pi r^2}$$

氨水池的表面积

$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{50}{\pi r^2}$$

$$=2\pi r^2+\frac{100}{r}$$

$$=2\pi r^2+\frac{50}{r}+\frac{50}{r}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{(2\pi r^2)\cdot\frac{50}{r}\cdot\frac{50}{r}}$$

$$=3\sqrt[3]{5000\pi}\quad（常数）.$$

当$2\pi r^2=\frac{50}{r}=\frac{50}{r}$，即$r=\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}$时，取等号，S达最小值．这时

$$h=\frac{50}{\pi r^2}=\frac{50}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}\right)^2}=2\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}=2r.$$

答：这个氨水池的高取$2\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}$米，底半径取$\sqrt[3]{\frac{25}{\pi}}$米，即高等于底的直径时，用料最省.

(二)求$\int_0^2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解：$\int_0^2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{1+x^2}\Big|_0^2=\sqrt{5}-1.$