内蒙古1977年高考数学试题解

（理　科）

1．（30分）

（1）化简：$\sqrt{4-12a+9a^2}$

解：$\sqrt{4-12a+9a^2}=\sqrt{(2-3a)^2}=\begin{cases}2-3a, & 当a\leqslant\frac{2}{3}时\\ 3a-2, & 当a>\frac{2}{3}时\end{cases}$

（2）计算：$\dfrac{(-27)^3\sqrt{(\frac{1}{16})^{-\frac{1}{2}}}}{(-9)^0\cdot(\frac{3}{2})^7\cdot(\frac{1}{2})^{-5}}$

解：原式$=\dfrac{-3^9\cdot\sqrt{4}}{1\cdot 3^7\cdot 2^{-7}\cdot 2^5}=\dfrac{-3^9\cdot 2}{3^7\cdot 2^{-2}}=-3^2\cdot 2^3=-72$

（3）已知$Lg2=0.3010$，$f(x)=Log_{\sqrt{10}}X$，求$f(5)$

解：$f(5)=Log_{\sqrt{10}}5=Log_{\sqrt{10}}\dfrac{10}{2}=\dfrac{Lg\frac{10}{2}}{Lg\sqrt{10}}$

$$=\frac{Lg10-lg2}{\frac{1}{2}Lg10}=\frac{1-0.3010}{\frac{1}{2}\times 1}=1.398$$

（4）求函数$y=\dfrac{\sqrt{1-\frac{2}{3}x}}{\sqrt[3]{3x-1}}$的定义域

解：要使这个函数有意义，自变量x必须满足下面的不等式组

$$\begin{cases}1-\frac{2}{3}x\geqslant 0\\ 3x-1\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\leqslant\frac{3}{2}\\ x\neq\frac{1}{3}\end{cases}$$

因此，函数$y=\dfrac{\sqrt{1-\frac{2}{3}x}}{\sqrt[3]{3x-1}}$的定义域为$\frac{1}{3}<x\leqslant\frac{3}{2}$和　$x<\frac{1}{3}$

（5）已知$Cos\theta=0.6$，$270°<\theta<360°$，求$(Sin\frac{\theta}{2}-Cos\frac{\theta}{2})^2$的值

解：$\because 270<\theta<360°\therefore Sin\theta$是个负值，所以

$$Sin\theta=-\sqrt{1-Cos^2\theta}=-\sqrt{1-0.6^2}=-0.8$$

因此

$$(\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2}-\operatorname{Cos}\frac{\theta}{2})^2=\operatorname{Sin}^2\frac{\theta}{2}+\operatorname{Cos}^2\frac{\theta}{2}-2\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2}\operatorname{Cos}\frac{\theta}{2}$$

$$=1-\operatorname{Sin}\theta=1+0.8=1.8$$

(6)把点P的极坐标$(-4,-\frac{4\pi}{3})$化成直角坐标。

解：极坐标和直角坐标的变换公式是

$$x=\rho\operatorname{Cos}\theta$$

$$y=\rho\operatorname{Sin}\theta$$

因此，P点的横坐标为

$$x=-4\operatorname{Cos}(-\frac{4\pi}{3})=-4\operatorname{Cos}(\pi+\frac{\pi}{3})=-4(-\operatorname{Cos}\frac{\pi}{3})$$

$$=-4(-\frac{1}{2})=2$$

纵坐标为

$$y=-4\operatorname{Sin}(-\frac{4\pi}{3})=4\operatorname{Sin}(\pi+\frac{\pi}{3})=-4\operatorname{Sin}\frac{\pi}{3}$$

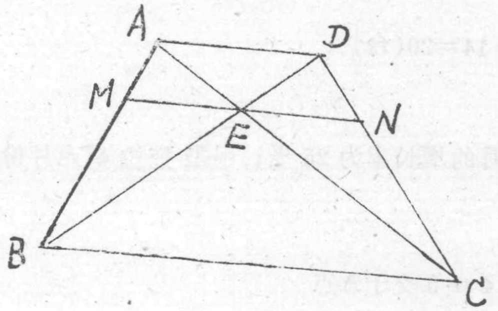
$$=-4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$$

∴P点的直角坐标是$(2,-2\sqrt{3})$

2．(14分)

(1)已知：梯形ABCD，AD∥BC，对角线AC和BD相交于E点，过E点作平行于底的直线，交AB于M点，交CD于N点，求证：ME＝EN

证明：∵AD∥MN∥BC



$$\therefore\frac{AM}{AB}=\frac{DN}{DC}$$

$$\frac{ME}{BC}=\frac{AM}{AB}$$

$$\frac{EN}{BC}=\frac{DN}{DC}$$

$$\therefore\frac{ME}{BC}=\frac{EN}{BC}$$

∴ME＝EN

(2)园台上底直径为12cm，下底直径为24cm，高为8cm，求圆台的全面积。($\pi\approx3.14$，精确到$0.1cm^2$)

解：由已知，上底半径$r_1=\frac{1}{2}\cdot12cm=6cm$，下底半径$r_2=\frac{1}{2}\times24cm=12cm$，园台的高$h=8cm$。由此得园台的母线

$$L=\sqrt{h^2+(r_2-r_1)^2}=\sqrt{8^2+(12-6)^2}=10(cm)$$

因此，园台的全面积

$$S=\pi[r_1^2+r_2^2+(r_1+r_2)L]$$
$$\approx 3.14[6^2+12^2+(6+12)\times 10]=3.14\times 360$$
$$\approx 1130.4(cm^2)$$

答：圆台的全面积约为$1130.4cm^2$

3．（12分）

红旗拖拉机厂今年元月份生产出一批甲、乙两种型号的拖拉机，其中生产乙型16台。从二月份起，甲型每月增产10台，而乙型按每月相同增长率逐步递增。又知二月份甲、乙两型拖拉机产量之比是3：2，三月份甲、乙两型拖拉机产量之和是65台。求乙型拖拉机每月的增长率及甲型拖拉机元月份的产量。

解：设乙型拖拉机每月的增长率为x，甲型拖拉机元月份的产量为y台。依题意得方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{y+10}{16(1+x)}=\dfrac{3}{2} & (1)\\ y+20+16(1+x)^2=65 & (2)\end{cases}$$

由(1)得

$$y=24x+14 \qquad (3)$$

把(3)代入(2)得

$$16x^2+56x-15=0$$
$$(4x-1)(4x+15)=0$$

解得

$$x_1=\frac{1}{4}=25\%，x_2=-\frac{15}{4}\text{（不合题意，舍去）}$$

由$x=\dfrac{1}{4}$得 $y=24x+14=24\times\dfrac{1}{4}+14=20$(台)

经检验，$x=\frac{1}{4}$，$y=20$是原方程组的解

答：红旗拖拉机厂生产的乙型拖拉机每月的增长率为25％；甲型拖拉机元月份的产量为20台。

4．（14分）

已知：直线$3x+y=5$及$2x-3y+4=0$交于A点

求：(1)过A点且与y轴垂直的直线方程；

(2)过A点且与圆$x^2+y^2=1$相切的直线方程.

解：先求出交点A的坐标（x，y），因为A既是直线$3x+y=15$上的点，也是直线$2x-3y+4=0$上的点。因此A的坐标（x，y）应适合方程组

$$\begin{cases}3x+y=5\\2x-3y+4=0\end{cases}$$

解之，得$x=1$，$y=2$. 所以A的坐标是（1，2）

（1）过A点与y轴垂直的直线方程是：$y=2$

（2）设所求直线和圆$x^2+y^2=1$相切于P（x，y）点。因为切线过A（1，2）点，所以所求切线的斜率是

$$k_1=\frac{y-2}{x-1}$$

而过切点P的圆的直径所在直线的斜率是

$$k_2=\frac{y}{x}$$

根据平面几何知识，这样两条直线是互相垂直的，因此它们的斜率的积应等于-1. 即

$$k_1\cdot k_2=\left(\frac{y-2}{x-1}\right)\frac{y}{x}=-1 \cdots\cdots(1)$$

而P（x，y）是圆上的点，又有

$$x^2+y^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)、(2)解得

$$\begin{cases}x_1=1\\ y_1=0\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}x_2=-\dfrac{3}{5}\\ y_2=\dfrac{4}{5}\end{cases}$$

由两点式，可得所求的直线有两条：

$$L_1:\ \frac{y-2}{x-1}=\frac{2-\frac{4}{5}}{1+\frac{3}{5}},\ 即3x-4y+5=0$$

和

$$L_2:\ \frac{x-1}{y-2}=\frac{1-1}{2-0},\ 即x=1$$

5.（15分）

甲、乙两船，甲船在某岛B的正南方向A处，AB=10海里，甲船自A处以4海里/小时的速度向正北方向航行；同时，乙船以6海里/小时的速度自岛B出发，向岛的北60^0西方向驶去，问几分钟后两船相距最近？（精确到1分）

解：设经过x小时后，甲船航行到C点，乙船航行到D点（如图），因此

$AC=4x$（海里），$BC=AB-AC=10-4x$（海里）

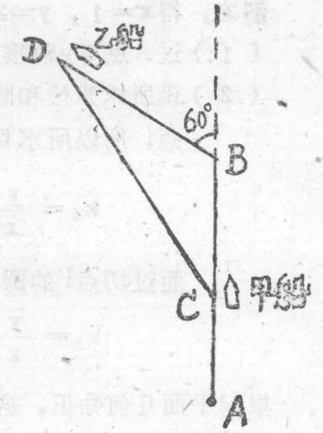
$BD=6x$（海里）

在△BCD中，$\angle DBC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$　　　所以甲、乙船间的距离的平方

$$DC^2=BD^2+BC^2-2\cdot BD\cdot BC\cdot \cos 120^\circ$$

$=(6x)^2+(10-4x)^2-2\cdot 6x\cdot(10-4x)\cdot(-\frac{1}{2})$

$=28x^2-20x+100=28(x-\frac{5}{14})^2+\frac{675}{7}$



∴当$x=\frac{5}{14}$(小时)≈21(分)时，DC^2取最小值，即

DC取最小值

答：大约21分钟后，两船相距最近.

6．(15分)

已知：在△ABC中，a、b、c是三内角A、B、C的对边，LgSinA、LgSinB、LgSinC成等差数列

(1)求证：$\frac{Sin^2A}{Sin^2B}=\frac{a}{c}$；

(2)又若方程$cx^2+2cx+a=0$有相等两实根，求证：sinA=sinB=sinC.

证明：(1)因为LgSinA，LgSinB，LgSinC成等差数列，所以

$$2LgSinB=LgSinA+LgSinC$$

得

$$Sin^2B=SinA\cdot SinC \qquad (1)$$

又根据正弦定理，有

$$SinC=\frac{CSinA}{a} \qquad (2)$$

把(2)代入(1)

$$Sin^2B=SinA\cdot\frac{CSinA}{a}$$

即 $\frac{Sin^2A}{Sin^2B}=\frac{a}{c}$.

(2)因为方程$cx^2+2cx+a=0$有相等两实根，所以

$$(2c)^2-4ac=0$$

$$4c(c-a)=0$$

故c=0(舍去)或c=a，从而得∠C=∠A，SinC=SinA　由(1)知

$$Sin^2B=SinASinC=Sic^2A,\ SinB=SinA$$

$$\therefore\ SinA=SinB=SinC$$

附加题(20分，不计入总分)

1．在△ABC中，求证

$$Sin^2A+Sin^2B+Cos^2C+2SinASinBCos(A+B)=1$$

证明：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Sin}^2A+\mathrm{Sin}^2B+\mathrm{Cos}^2C+2\mathrm{Sin}A\mathrm{Sin}B\mathrm{Cos}(A+B)\\
&=\mathrm{Sin}^2A+\mathrm{Sin}^2B+\mathrm{Cos}^2(A+B)+2\mathrm{Sin}A\mathrm{Sin}B\\
&\quad(\mathrm{Cos}A\mathrm{Cos}B-\mathrm{Sin}A\mathrm{Sin}B)\\
&=\mathrm{Sin}^2A+\mathrm{Sin}^2B+(\mathrm{Cos}A\mathrm{Cos}B-\mathrm{Sin}A\mathrm{Sin}B)^2\\
&\quad+2\mathrm{Sin}A\mathrm{Sin}B\mathrm{Cos}A\mathrm{Cos}B-2\mathrm{Sin}^2A\mathrm{Sin}^2B\\
&=\mathrm{Sin}^2A+\mathrm{Sin}^2B+\mathrm{Cos}^2A\mathrm{Cos}^2B-\mathrm{Sin}^2A\mathrm{Sin}^2B\\
&=\mathrm{Sin}^2A(1-\mathrm{Sin}^2B)+\mathrm{Sin}^2B+\mathrm{Cos}^2A\mathrm{Cos}^2B\\
&=\mathrm{Sin}^2A\mathrm{Cos}^2B+\mathrm{Sin}^2B+\mathrm{Cos}^2A\mathrm{Cos}^2B\\
&=\mathrm{Cos}^2B(\mathrm{Sin}^2A+\mathrm{Cos}^2A)+\mathrm{Sis}^2B\\
&=\mathrm{Cos}^2B+\mathrm{Sin}^2B\\
&=1
\end{aligned}
$$

2．已知：椭圆的中心点在原点，长轴和短轴都在坐标轴上，离心率$e=0.8$，一条准线方程为$y=-\frac{25}{4}$，求内接于椭圆的最大矩形面积

解：因为准线方程是$y=-\frac{25}{4}$，它与x轴平行，而中心在原点，所以长轴在y轴上，短轴在x轴上，所以椭圆的方程有如下形式：

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$（其中a是半长轴，b是半短轴）由已知可得方程组

$$
\begin{cases}\frac{c}{a}=0.8\\ -\frac{a^2}{c}=-\frac{25}{4}\end{cases}
$$

解之，得

$$
\begin{cases}a=5\\ c=4\end{cases}
$$

$$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$$

因此，椭园的方程是

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

其内接最大矩形的长和宽，应分别是$\sqrt{2}a$和$\sqrt{2}b$（参阅陕西参考题1的解），即长和宽是$5\sqrt{2}$和$3\sqrt{2}$，所以得内接最大矩形的面积为

$$S=3\sqrt{2}\times5\sqrt{2}=30$$