

理科数学

1. 解方程: $\sqrt{x-1} = 3-x$.

2. 计算: $2^{-\frac{1}{2}} + \frac{2^0}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

3. 已知 $\lg 2 = 0.3010$, $\lg 3 = 0.4771$, 求 $\lg \sqrt{45}$.

4. 证明: $(1 + \tan \alpha)^2 = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$.

5. 求过两直线 $x+y-7=0$ 和 $3x-y-1=0$ 的交点且过 $(1,1)$ 点的直线方程.

6. 某工厂今年七月份的产值为 100 万元, 以后每月产值比上月增加 20%, 问今年七月份到十月份总产值是多少?

7. 已知二次函数 $y = x^2 - 6x + 5$.

- (1) 求出它的图象的顶点坐标和对称轴方程;
- (2) 画出它的图象;
- (3) 分别求出它的图象和 x 轴、 y 轴的交点坐标.

8. 一只船以 20 海里/小时的速度向正东航行, 起初船在 A 处看见一灯塔 B 在船的北 45° 东方向, 一小时后船在 C 处看见这个灯塔在船的北 15° 东方向, 求这时船和灯塔的距离 CB .

9. 一个圆内接三角形 ABC , $\angle A$ 的平分线交 BC 于 D , 交外接圆于 E , 求证: $AD \cdot AE = AC \cdot AB$.

10. 当 m 取哪些值时, 直线 $y = x + m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 有一个交点? 有两个交点? 没有交点? 当它们有一个交点时, 画出它的图象.

附加题

11. (1) 求函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x}, & (x \neq 0) \\ 0, & (x = 0) \end{cases}$ 的导数.

(2) 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积.

12. (1) 试用 $\varepsilon - \delta$ 语言叙述“函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续”的定义.

(2) 试证明: 若 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, 且 $f(x_0) > 0$, 则存在一个 x_0 的 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 在这个邻域内, 处处有 $f(x) > 0$.