吉林1977年高考数学试题解

一、

1．什么是因式分解？把$18a^3-48a^2b+32ab^2$分解因式.

解：把一个多项式分解成几个单项式或多项式连乘的形式，叫做多项式的因式分解。

$$18a^3-48a^2b+32ab^2=2a(9a^2-24ab+16b^2)=2a(3a-4b)^2.$$

2．什么是方程？什么是方程的解？解方程：$\frac{2}{x-2}+x=\frac{x}{x-2}$.

解：含有未知数的等式叫做方程，使方程两端相等的未知数的值叫方程的解。

解方程：$\frac{2}{x-2}+x=\frac{x}{x-2}$　　去分母：$2+x(x-2)=x$

整理得　$x^2-3x+2=0$　$(x-2)(x-1)=0$．　$\therefore x_1=2$，$x_2=1$．

把$x=2$代入原方程分母为零，　$\therefore x=2$是增根，舍去．

故原方程的解是$x=1$

3．在$\triangle ABC$中，$\angle c$是直角，CD是AB上的高，已知$AB=9$，$AC=6$．求CD．

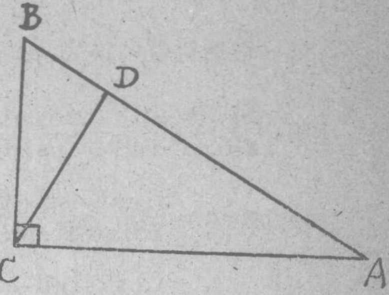
解：$\because \angle C$是直角，

$\therefore \triangle ABC$是直角三角形．

由勾股定理得

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}$

$=\sqrt{81-36}=3\sqrt{5}$．



又：CD是AB边上的高，

$\therefore \frac{1}{2}AB\cdot CD=\frac{1}{2}AC\cdot BC$．

$$CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{6\cdot 3\sqrt{5}}{9}=2\sqrt{5}.$$

二、k是什么值时，方程$x^2+4x+k=0$有

1．两个不相等的实根？　2．相等的实根？　3．没有实根？

解：方程$x^2+4x+k=0$的判别式是　$\triangle=4^2-4k=4(4-k)$．

$\therefore$当$k<4$时，$\triangle>0$，方程有两个不相等的实根，

当$k=4$时，$\triangle=0$，方程有两个相等的实根，

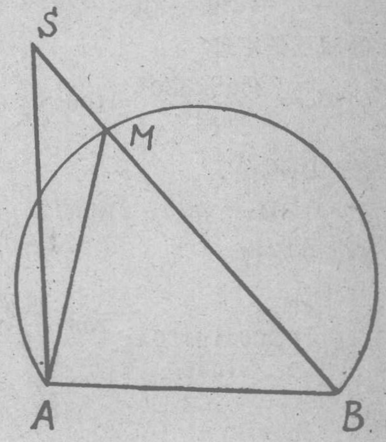
当$k>4$时，$\triangle<0$，方程没有实根，

三、什么是平面上的轨迹？

某港口外海面上，有一个暗礁区，为进港船只的安全，建有A、B两灯塔，把暗礁区所张的危险的角$\angle AMB$的大小通知船上．试用轨迹涵义证明：只要进港船只S的视角$\angle ASB<\angle AMB$时，船只就可安全进港．

解：平面上的动点按照一定规律运动所描绘的图形，就叫做动点在平面上的轨迹。

港口所建的两灯塔A、B之间距离为一定长，暗礁区所张的角$\angle AMB$也已知，为一定角．因此$\angle AMB$的顶点M的轨迹是以AB为弦，园周角为定角$\angle AMB$所划的园弧，暗礁区就在园弧内（如图）



根据园外任一点到两弦连线的夹角都小于该弦上的园周角这一道理，所以在$\angle ASB<\angle AMB$时船总是在暗礁区$\overset{\frown}{AMB}$的外面，所以船就可以安全进港。

四、1．计算：$8x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{y^{-\frac{1}{3}}x^4\sqrt{y^{\frac{4}{9}}}}$；

解：原式$=8x^{-\frac{1}{3}}〔y^{-\frac{1}{3}}x^{4}(y^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}〕^{\frac{1}{2}}=8x^{-\frac{1}{3}}x^{2}y^{-\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{3}}$

$=8x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{1}{6}}=8x\sqrt[6]{x^{4}y}$

2．证明：$log_ab\cdot log_bC\cdot log_ca=1$。

〔证〕根据对数的换底公式，有 $log_ab\cdot log_bC\cdot log_c\alpha=\frac{lgb}{lga}\cdot\frac{lgc}{lgb}\cdot\frac{lga}{lgc}=1$.

3．证明：$\frac{Sin(\alpha+\beta)-2Sin\alpha Cos\beta}{2Sin\alpha Sin\beta+Cos(\alpha+\beta)}=tg(\beta-\alpha)$.

〔证〕左边$=\frac{Sin\alpha Cos\beta+Cos\alpha Sin\beta-2Sin\alpha Cos\beta}{2Sin\alpha Sin\beta+Cos\alpha Co\beta-Sin\alpha Sin\beta}$

$=\frac{Cos\alpha sin\beta-Sin\alpha Co\beta}{Cos\alpha Cos\beta+sin\alpha Sin\beta}=\frac{sin(\beta-\alpha)}{Cos(\beta-\alpha)}=tg(\beta-\alpha)=$右边、

$\therefore\frac{Sin(\alpha+\beta)-2Sin\alpha Cos\beta}{2sin\alpha sin\beta+Cos(\alpha+\beta)}=tg(\beta-\alpha)$.

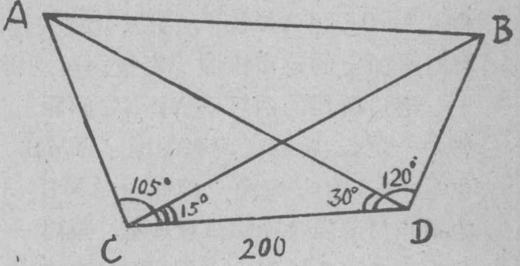
4．计算：在等比数列里，已知$a_1=2$，$S_3=26$，求q.

解：$\because a_1=2$，$S_3=26$，根据等比数列前n项和的公式，有 $26=\frac{2(1-q^3)}{1-q}$

即 $1+q+q^2=13$　　$q^2+q-12=0$　　$(q+4)(q-3)=0$.

$\therefore q_1=-4$，$q_2=3$.

五、修建水库时，欲测两山腰上A、B两点间的距离，在某处选与A、B在同一平面内C、D两点，测得CD=200米，$\angle ACD=105°$，$\angle BCD=15°$，$\angle BDC=120°$，$\angle ADC=30°$，试求AB.



解：在△ACD中，

$\angle CAD=180°-\angle ACD-\angle ADC$

$=180°-105°-30°=45°$

根据正弦定理

$AC=\frac{200Sin30°}{Sin45°}=100\sqrt{2}$(米)

在△BDC中，

$\angle CBD=180°-\angle BDC-\angle BCD=180°-120°-15°=45°$

由正弦定理

$$BC=\frac{200\sin120°}{\sin45°}=\frac{200\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=100\sqrt{6}(米).$$

在△ACB中，　$\angle ACB=\angle ACD-\angle BCD=105°-15°=90°$

因此，由勾股定理

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{(100\sqrt{2})^2+(100\sqrt{6})^2}=200\sqrt{2}\text{（米）}.$$

答：AB长为$200\sqrt{2}$米.

六、已知直线$4x+3y-12=0$和园心在（4，7）点的一个园相切，求这园的半径及过园心和切点的直线方程.

解：根据已知，园的方程可写为　$(x-4)^2+(y-7)^2=R^2$.

∵它与直线$4x+3y-12=0$相切.

∴园心(4，7)到直线$4x+3y-12=0$的距离等于园半径R，即

$$R=\frac{|4\times4+3\times7-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{25}{5}=5.$$

从而园的方程是　$(x-4)^2+(y-7)^2=5^2$.

下面求园和直线的交点坐标(x、y)，解如下方程组

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-7)^2=5^2\\4x+3y-12=0\end{cases}$$

解之，得两组相同解 $\begin{cases}x_1=x_2=0\\y_1=y_2=4.\end{cases}$　表示(0，4)是切点.

∴过园心(4，7)和切点(0，4)的直线方程为

$$\frac{y-4}{x-0}=\frac{7-4}{4-0}$$

即　$3x-4y+16=0$.

参考题

一、把$4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$化成标准方程，并指出它所代表的曲线的长、短半轴、离心率.

解：原方程可化为：

$$4(x^2+2x+1)+9(y^2-4y+4)-36=0.$$

$$4(x+1)^2+9(y-4)^2=36$$

标准式为：　$\dfrac{(x+1)^2}{3^2}+\dfrac{(y-2)^2}{2^2}=1.$

此方程表示以（-1，2）为中心的椭园。长半轴$\alpha=3$，短半轴$b=2$。

其离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{3^2-2^2}}{3}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}.$

二、试求下列各式的导数：

1．$y=3x^2+\sqrt{x}+5$；

解：$y'=6x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=6x+\dfrac{\sqrt{x}}{2x}.$

2. $y=\ln(x^{10})+\ln(\ln x)$.

解：$y'=\frac{10x^9}{x^{10}}+\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\frac{10}{x}+\frac{1}{x\ln x}$

3. $y=x^x$.

解：$y'=x\cdot x^{x-1}+x^x\ln x=x^x(1+\ln x)$.

三、求微分方程的通解：

1. $y'=\frac{2+y}{3-x}$；

解：原方程可写成：

$$\frac{dy}{2+y}=\frac{dx}{3-x}$$

两边积分，得

$$\mathrm{Ln}|2+y|=-\mathrm{Ln}|3-x|+C_1$$ （C_1为任意常数）.

$$2+y=\frac{C}{3-x}$$

∴通解为 $y=\frac{C}{3-x}-2$. （其中$C=e^{C_1}$，是任意常数）.

2. $y''-2y'-3y=0$.

解：这是一个二阶常系数齐次线性方程，其特征方程

$$\lambda^2-2\lambda-3=0$$

的根是3，−1，因此原方程的通解为

$$y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$$

其中C_1，C_2是任意常数.